Université de Rennes 1
DEA STIR
Signal — Télécommunications — Images — Radar
Option Signal

Examen du cours
"Filtre de Kalman et modèles de Markov cachés"
Mardi 17 décembre 2002, 10:30 à 12:00

Problème :

L'objectif de ce problème est d'établir par une autre méthode, et de généraliser, les équations du filtre non–linéaire optimal. Soit $\{X_n\}$ une chaîne de Markov à valeurs dans $E = \mathbb{R}^m$, de noyau de probabilités de transition $Q(x, dx')$, et pour tout $n \geq 0$, soit g_n une fonction strictement positive définie sur E.

Pour tout $n \geq 0$, on considère les mesures positives $\gamma_n(dx)$ et $\gamma_n^-(dx)$ sur E, définies par les formules de Feynman–Kac

$$\langle \gamma_n, f \rangle = \int_E f(x)\, \gamma_n(dx) = \mathbb{E}[f(X_n) \prod_{k=0}^{n} g_k(X_k)] ,$$

et

$$\langle \gamma_n^-, f \rangle = \int_E f(x)\, \gamma_n^-(dx) = \mathbb{E}[f(X_n) \prod_{k=0}^{n-1} g_k(X_k)] ,$$

respectivement, pour toute fonction test f définie sur E. A partir de $\gamma_n(dx)$ et $\gamma_n^-(dx)$, on peut obtenir par normalisation les distributions de probabilité $\mu_n(dx)$ et $\mu_n^-(dx)$ sur E, définies par

$$\mu_n(dx) = \frac{\gamma_n(dx)}{\langle \gamma_n, 1 \rangle} \qquad \text{et} \qquad \mu_n^-(dx) = \frac{\gamma_n^-(dx)}{\langle \gamma_n^-, 1 \rangle} .$$

(i) **En considérant la fonction $f \equiv 1$, montrer que**

$$\langle \gamma_n, 1 \rangle = \langle \gamma_n^-, g_n \rangle \qquad \textbf{et} \qquad \langle \gamma_n^-, 1 \rangle = \langle \gamma_{n-1}, 1 \rangle .$$

(ii) **En déduire que**

$$\langle \gamma_n, 1 \rangle = \prod_{k=0}^{n} \langle \mu_k^-, g_k \rangle \ .$$

(iii) **En déduire qu'il est possible de définir les mesures positives $\gamma_n(dx)$ et $\gamma_n^-(dx)$ à partir des distributions de probabilité $\mu_n(dx)$ et $\mu_n^-(dx)$.**

(iv) **Montrer que**

$$\langle \gamma_n, f \rangle = \langle \gamma_n^-, g_n\, f \rangle \qquad \textbf{et} \qquad \langle \gamma_n^-, f \rangle = \langle \gamma_{n-1}, Q\, f \rangle \ ,$$

pour toute fonction test f définie sur E.

(v) **En déduire que**

$$\mu_n(dx') = \frac{g_n(x')\, \mu_n^-(dx')}{\langle \mu_n^-, g_n \rangle} \qquad \textbf{et} \qquad \mu_n^-(dx') = \int_E \mu_{n-1}(dx)\, Q(x, dx') \ .$$

Plus généralement, on considère les mesures $\sigma_n(dx)$ et $\sigma_n^-(dx)$ sur E, définies par

$$\langle \sigma_n, f \rangle = \int_E f(x)\, \sigma_n(dx) = \mathbb{E}[f(X_n)\ [\sum_{k=0}^{n} c_k(X_k)\,]\ \prod_{k=0}^{n} g_k(X_k)\,] \ ,$$

et

$$\langle \sigma_n^-, f \rangle = \int_E f(x)\, \sigma_n^-(dx) = \mathbb{E}[f(X_n)\ [\sum_{k=0}^{n-1} c_k(X_k)\,]\ \prod_{k=0}^{n-1} g_k(X_k)\,] \ ,$$

respectivement, pour toute fonction test f définie sur E, et les versions normalisées $\rho_n(dx)$ et $\rho_n^-(dx)$, définies par

$$\rho_n(dx) = \frac{\sigma_n(dx)}{\langle \gamma_n, 1 \rangle} \qquad \text{et} \qquad \rho_n^-(dx) = \frac{\sigma_n^-(dx)}{\langle \gamma_n^-, 1 \rangle} \ .$$

(vi) **Montrer que**

$$\langle \sigma_n, f \rangle = \langle \sigma_n^-, g_n\, f \rangle + \langle \gamma_n^-, c_n\, g_n\, f \rangle \qquad \textbf{et} \qquad \langle \sigma_n^-, f \rangle = \langle \sigma_{n-1}, Q\, f \rangle \ ,$$

pour toute fonction test f définie sur E.

(vii) **En déduire que**

$$\rho_n(dx') = \frac{g_n(x')\, \rho_n^-(dx')}{\langle \mu_n^-, g_n \rangle} + \frac{c_n(x')\, g_n(x')\, \mu_n^-(dx')}{\langle \mu_n^-, g_n \rangle} \ ,$$

et

$$\rho_n^-(dx') = \int_E \rho_{n-1}(dx)\, Q(x, dx') \ .$$

Application au filtrage On suppose que la chaîne de Markov $\{X_n\}$ n'est pas observée directement, mais qu'on dispose d'une suite d'observations $\{Y_n\}$ à valeurs dans $F = \mathbb{R}^d$, vérifiant la propriété de *canal sans mémoire*, avec la probabilité d'émission

$$\mathbb{P}[Y_n \in dy \mid X_n = x] = \bar{g}_n(x,y)\, dy \ .$$

(viii) **Montrer que la loi jointe des états cachés** $(X_0, \cdots, X_n)$ **et des observations** $(Y_0, \cdots, Y_n)$ **vérifie**

$$\mathbb{P}[X_0 \in dx_0, \cdots, X_n \in dx_n, Y_0 \in dy_0, \cdots, Y_n \in dy_n]$$

$$= \mathbb{P}[X_0 \in dx_0, \cdots, X_n \in dx_n] \prod_{k=0}^{n} \bar{g}_k(x_k, y_k)\, dy_0 \cdots dy_n \ ,$$

et que

$$\mathbb{P}[Y_0 \in dy_0, \cdots, Y_n \in dy_n] = \mathbb{E}[\prod_{k=0}^{n} \bar{g}_k(X_k, y_k)\,]\, dy_0 \cdots dy_n \ .$$

(ix) **En déduire que la loi conditionelle jointe des états cachés** $(X_0, \cdots, X_n)$ **sachant** $(Y_0 = y_0, \cdots, Y_n = y_n)$ **vérifie**

$$\mathbb{E}[f_n(X_0, \cdots, X_n) \mid Y_0 = y_0, \cdots, Y_n = y_n] = \frac{\mathbb{E}[f_n(X_0, \cdots, X_n) \ \prod_{k=0}^{n} \bar{g}_k(X_k, y_k)\,]}{\mathbb{E}[\prod_{k=0}^{n} \bar{g}_k(X_k, y_k)\,]} \ ,$$

pour toute fonction test f_n **définie sur l'espace produit** $E^{n+1} = \underbrace{E \times \cdots \times E}_{(n+1)\ \textbf{fois}}$**.**

Pour tout $k \geq 0$, on introduit la fonction strictement positive g_k, définie par la relation $g_k(x) = \bar{g}_k(x, y_k)$ pour tout $x \in E$.

(x) **Déduire de la question (ix) que la loi conditionelle de l'état caché** X_n **sachant** $(Y_0 = y_0, \cdots, Y_n = y_n)$ **vérifie**

$$\mathbb{E}[f(X_n) \mid Y_0 = y_0, \cdots, Y_n = y_n] = \frac{\mathbb{E}[f(X_n) \ \prod_{k=0}^{n} g_k(X_k)\,]}{\mathbb{E}[\prod_{k=0}^{n} g_k(X_k)\,]} \ ,$$

pour toute fonction test f **définie sur** E**.**

(xi) **En déduire que la réponse à la question (v) permet de retrouver les équations du filtre non–linéaire optimal** .