Université de Rennes 1
DEA STIR
Signal — Télécommunications — Images — Radar
Option Signal

Examen du cours
“Filtre de Kalman et modèles de Markov cachés”
Mercredi 15 décembre 1999, 8:00 à 9:30
— Corrigé —

Problème :

L'objectif de ce problème est de proposer un algorithme efficace pour calculer l'espérance conditionnelle d'une fonctionnelle exponentielle intégrale dans le modèle de Markov caché suivant :

- La suite $\{X_k\,,\, k \geq 0\}$ est une chaîne de Markov à espace d'état fini $E = \{1, \cdots, N\}$, de loi initiale
$$\mathbb{P}[X_0 = i] = \nu_i \;, \qquad \text{pour tout } i \in E \;,$$
et de matrice de transition
$$\mathbb{P}[X_{k+1} = j \mid X_k = i] = \pi_{i,j} \;, \qquad \text{pour tout } i, j \in E \;.$$
- Les observations $\{Y_k\,,\, k \geq 0\}$ sont à valeurs dans un espace fini $O = \{1, \cdots, M\}$, et on suppose que la propriété de canal sans mémoire est vérifiée, avec
$$\mathbb{P}[Y_k = \ell \mid X_k = i] = b_i^\ell \;, \qquad \text{pour tout } i \in E, \text{ et tout } \ell \in O \;.$$

Il s'agit de calculer la quantité suivante :

$$\mathbb{E}[\exp\{\sum_{k=0}^{n} c(X_k)\} \mid Y_0, \cdots, Y_n\,] \;,$$

où la fonction c, définie sur l'ensemble fini E et à valeurs réelles, est caractérisée de manière équivalente par la donnée d'un vecteur $c = (c_i)$, c'est–à–dire que

$$c(X_k) = c_i \;, \qquad \text{si } X_k = i \;.$$

Pour tout $i \in E$ et tout $\ell_0, \cdots, \ell_n \in O$, on définit

$$\gamma_n^i[\ell_0, \cdots, \ell_n] = \mathbb{E}[\exp\{\sum_{k=0}^{n} c(X_k)\} \ \mathbf{1}_{[X_n = i]} \ \mathbf{1}_{[Y_0 = \ell_0, \cdots, Y_n = \ell_n]} \,] \ ,$$

et comme dans le cours

$$\alpha_n^i[\ell_0, \cdots, \ell_n] = \mathbb{P}[X_n = i, Y_0 = \ell_0, \cdots, Y_n = \ell_n\,] \ .$$

On rappelle que la fonction indicatrice $\mathbf{1}$ est définie par

$$\mathbf{1}_{[u \in A]} = \begin{cases} 1 & \text{si } u \in A, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et que pour toute v.a. Z

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_{[Z \in A]}] = \mathbb{P}[Z \in A] \ .$$

(i) **En procédant comme pour l'équation de Baum forward, montrer que**

$$\gamma_n^i[\ell_0, \cdots, \ell_n] = \sum_{i_0, \cdots, i_{n-1} \in E} \exp\{\sum_{k=0}^{n-1} c_{i_k} + c_i\} \ \nu_{i_0} \ \pi_{i_0, i_1} \cdots \pi_{i_{n-1}, i} \ b_{i_0}^{\ell_0} \cdots b_{i_{n-1}}^{\ell_{n-1}} \ b_i^{\ell_n} \ .$$

Solution

$$\begin{aligned}
\gamma_n^i[\ell_0, \cdots, \ell_n] &= \mathbb{E}[\exp\{\sum_{k=0}^{n} c(X_k)\} \ \mathbf{1}_{[X_n = i]} \ \mathbf{1}_{[Y_0 = \ell_0, \cdots, Y_n = \ell_n]} \,] \\
&= \sum_{i_0, \cdots, i_{n-1} \in E} \mathbb{E}[\exp\{\sum_{k=0}^{n} c(X_k)\} \ \mathbf{1}_{[X_0 = i_0, \cdots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i]} \\
&\qquad\qquad\qquad \mathbf{1}_{[Y_0 = \ell_0, \cdots, Y_n = \ell_n]} \,] \\
&= \sum_{i_0, \cdots, i_{n-1} \in E} \exp\{\sum_{k=0}^{n-1} c_{i_k} + c_i\} \ \mathbb{P}[X_0 = i_0, \cdots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i, \\
&\qquad\qquad\qquad Y_0 = \ell_0, \cdots, Y_n = \ell_n\,] \\
&= \sum_{i_0, \cdots, i_{n-1} \in E} \exp\{\sum_{k=0}^{n-1} c_{i_k} + c_i\} \ \nu_{i_0} \ \pi_{i_0, i_1} \cdots \pi_{i_{n-1}, i} \ b_{i_0}^{\ell_0} \cdots b_{i_{n-1}}^{\ell_{n-1}} \, b_i^{\ell_n} \ .
\end{aligned}$$

$\square$

(ii) **De la même manière, montrer que**

$$\mathbb{E}[\exp\{\sum_{k=0}^{n+1} c(X_k)\}\ \mathbf{1}_{[X_n = i, X_{n+1} = j]}\ \mathbf{1}_{[Y_0 = \ell_0, \cdots, Y_n = \ell_n, Y_{n+1} = \ell_{n+1}]}\,]$$
$$= \exp\{c_j\}\ b_j^{\ell_{n+1}}\ \pi_{i,j}\ \gamma_n^i[\ell_0, \cdots, \ell_n]\ .$$

Solution

$$\mathbb{E}[\exp\{\sum_{k=0}^{n+1} c(X_k)\}\ \mathbf{1}_{[X_n = i, X_{n+1} = j]}\ \mathbf{1}_{[Y_0 = \ell_0, \cdots, Y_n = \ell_n, Y_{n+1} = \ell_{n+1}]}\,]$$

$$= \sum_{i_0,\cdots,i_{n-1}\in E} \mathbb{E}[\exp\{\sum_{k=0}^{n+1} c(X_k)\}\ \mathbf{1}_{[X_0 = i_0, \cdots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i, X_{n+1} = j]}$$
$$\mathbf{1}_{[Y_0 = \ell_0, \cdots, Y_n = \ell_n, Y_{n+1} = \ell_{n+1}]}\,]$$

$$= \sum_{i_0,\cdots,i_{n-1}\in E} \exp\{\sum_{k=0}^{n-1} c_{i_k} + c_i + c_j\}\ \mathbb{P}[X_0 = i_0, \cdots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i, X_{n+1} = j,$$
$$Y_0 = \ell_0, \cdots, Y_n = \ell_n, Y_{n+1} = \ell_{n+1}\,]$$

$$= \sum_{i_0,\cdots,i_{n-1}\in E} \exp\{\sum_{k=0}^{n-1} c_{i_k} + c_i + c_j\}\ \nu_{i_0}\,\pi_{i_0,i_1}\cdots\pi_{i_{n-1},i}\,\pi_{i,j}\ b_{i_0}^{\ell_0}\cdots b_{i_{n-1}}^{\ell_{n-1}}\,b_i^{\ell_n}\,b_j^{\ell_{n+1}}$$

$$= \exp\{c_j\}\,b_j^{\ell_{n+1}}\,\pi_{i,j} \sum_{i_0,\cdots,i_{n-1}\in E} \exp\{\sum_{k=0}^{n-1} c_{i_k} + c_i\}\ \nu_{i_0}\,\pi_{i_0,i_1}\cdots\pi_{i_{n-1},i}\ b_{i_0}^{\ell_0}\cdots b_{i_{n-1}}^{\ell_{n-1}}\,b_i^{\ell_n}$$

$$= \exp\{c_j\}\,b_j^{\ell_{n+1}}\,\pi_{i,j}\ \gamma_n^i[\ell_0, \cdots, \ell_n]\ .$$

□

(iii) **En sommant sur $i \in E$, montrer que**

$$\gamma_{n+1}^j[\ell_0, \cdots, \ell_{n+1}] = \exp\{c_j\}\ b_j^{\ell_{n+1}} \sum_{i\in E} \pi_{i,j}\ \gamma_n^i[\ell_0, \cdots, \ell_n]\ .$$

Solution

Par définition

$$
\begin{aligned}
\gamma^j_{n+1}[\ell_0,\cdots,\ell_{n+1}] &= \mathbb{E}[\exp\{\sum_{k=0}^{n+1} c(X_k)\}\ \mathbf{1}_{[X_{n+1}=j]}\ \mathbf{1}_{[Y_0=\ell_0,\cdots,Y_n=\ell_n,Y_{n+1}=\ell_{n+1}]}\,] \\
&= \sum_{i\in E} \mathbb{E}[\exp\{\sum_{k=0}^{n+1} c(X_k)\}\ \mathbf{1}_{[X_n=i,X_{n+1}=j]} \\
&\qquad\qquad \mathbf{1}_{[Y_0=\ell_0,\cdots,Y_n=\ell_n,Y_{n+1}=\ell_{n+1}]}\,] \\
&= \exp\{c_j\}\, b_j^{\ell_{n+1}} \sum_{i\in E} \pi_{i,j}\ \gamma^i_n[\ell_0,\cdots,\ell_n]\ .
\end{aligned}
$$

□

On définit $w_n=(w^i_n)$ et $p_n=(p^i_n)$ avec

$$w^i_n = \gamma^i_n[Y_0,\cdots,Y_n]\ , \qquad \text{pour tout } i\in E\ ,$$

et comme dans le cours

$$p^i_n = \alpha^i_n[Y_0,\cdots,Y_n]\ , \qquad \text{pour tout } i\in E\ .$$

(iv) **Déduire du résultat obtenu à la question (iii) que la suite $\{w_n\}$ vérifie l'équation récurrente suivante**

$$w^j_{n+1} = \exp\{c_j\}\ b_j(Y_{n+1})\ \sum_{i\in E} \pi_{i,j}\ w^i_n\ .$$

Solution

En remplaçant $(\ell_0,\cdots,\ell_{n+1})$ par $(Y_0,\cdots,Y_{n+1})$, on obtient immédiatement

$$
\begin{aligned}
w^j_{n+1} &= \gamma^j_{n+1}[Y_0,\cdots,Y_{n+1}] \\
&= \exp\{c_j\}\, b_j(Y_{n+1})\ \sum_{i\in E} \pi_{i,j}\ \gamma^i_n[Y_0,\cdots,Y_n] \\
&= \exp\{c_j\}\, b_j(Y_{n+1})\ \sum_{i\in E} \pi_{i,j}\ w^i_n\ .
\end{aligned}
$$

□

(v) **Rappeler l'équation récurrente vérifiée par la suite $\{p_n\}$.**

Solution

$$p^j_{n+1} = b_j(Y_{n+1}) \sum_{i \in E} \pi_{i,j} \; p^i_n \; .$$

$\square$

(vi) **Retrouver cette équation directement à partir du résultat obtenu à la question (iv).**

Solution

Si $c_j = 0$ pour tout $j \in E$, alors $\gamma^i_n[Y_0, \cdots, Y_n] = \alpha^i_n[Y_0, \cdots, Y_n]$ et donc $w^i_n = p^i_n$ pour tout $i \in E$ et pour tout instant n.

Dans ce cas particulier, l'équation obtenue en (iv) s'écrit

$$w^j_{n+1} = b_j(Y_{n+1}) \sum_{i \in E} \pi_{i,j} \; w^i_n \; ,$$

pour tout $j \in E$.

$\square$

(vii) **Directement à partir de la définition, montrer que**

$$\gamma^i_n[\ell_0, \cdots, \ell_n] \; = \; \mathbb{E}[\exp\{\sum_{k=0}^n c(X_k)\} \; \mathbf{1}_{[X_n \, = \, i]} \mid Y_0 = \ell_0, \cdots, Y_n = \ell_n \,] \; \sum_{j \in E} \alpha^j_n[\ell_0, \cdots, \ell_n] \; .$$

Solution

D'après la formule de Bayes

$$\begin{aligned}
\gamma^i_n[\ell_0, \cdots, \ell_n] \; &= \; \mathbb{E}[\exp\{\sum_{k=0}^n c(X_k)\} \; \mathbf{1}_{[X_n \, = \, i]} \; \mathbf{1}_{[Y_0 \, = \, \ell_0, \cdots, Y_n \, = \, \ell_n]} \,] \\
&= \; \mathbb{E}[\exp\{\sum_{k=0}^n c(X_k)\} \; \mathbf{1}_{[X_n \, = \, i]} \mid Y_0 = \ell_0, \cdots, Y_n = \ell_n \,] \\
&\qquad\qquad \mathbb{P}[Y_0 = \ell_0, \cdots, Y_n = \ell_n \,] \; ,
\end{aligned}$$

et par ailleurs on sait que

$$\mathbb{P}[Y_0 = \ell_0, \cdots, Y_n = \ell_n \,] = \sum_{j \in E} \alpha^j_n[\ell_0, \cdots, \ell_n] \; .$$

$\square$

(viii) **En déduire que**

$$w_n^i = \mathbb{E}[\exp\{\sum_{k=0}^n c(X_k)\} \, \mathbf{1}_{[X_n \, = \, i]} \mid Y_0, \cdots, Y_n \,] \, \sum_{j \in E} p_n^j \ .$$

Solution

En remplaçant $(\ell_0, \cdots, \ell_n)$ par $(Y_0, \cdots, Y_n)$, on obtient immédiatement

$$\begin{aligned} w_n^i &= \gamma_n^i[Y_0, \cdots, Y_n] \\ &= \mathbb{E}[\exp\{\sum_{k=0}^n c(X_k)\} \, \mathbf{1}_{[X_n \, = \, i]} \mid Y_0, \cdots, Y_n \,] \, \sum_{j \in E} \alpha_n^j[Y_0, \cdots, Y_n] \\ &= \mathbb{E}[\exp\{\sum_{k=0}^n c(X_k)\} \, \mathbf{1}_{[X_n \, = \, i]} \mid Y_0, \cdots, Y_n \,] \, \sum_{j \in E} p_n^j \ . \end{aligned}$$

□

(ix) **En sommant sur $i \in E$, proposer un algorithme efficace pour le calcul de**

$$\mathbb{E}[\exp\{\sum_{k=0}^n c(X_k)\} \mid Y_0, \cdots, Y_n \,] \ .$$

Solution

Par définition

$$\begin{aligned} \sum_{i \in E} w_n^i &= \sum_{i \in E} \mathbb{E}[\exp\{\sum_{k=0}^n c(X_k)\} \, \mathbf{1}_{[X_n \, = \, i]} \mid Y_0, \cdots, Y_n \,] \, \sum_{j \in E} p_n^j \\ &= \mathbb{E}[\exp\{\sum_{k=0}^n c(X_k)\} \mid Y_0, \cdots, Y_n \,] \, \sum_{j \in E} p_n^j \ , \end{aligned}$$

c'est–à–dire que

$$\mathbb{E}[\exp\{\sum_{k=0}^n c(X_k)\} \mid Y_0, \cdots, Y_n \,] = \frac{\displaystyle\sum_{i \in E} w_n^i}{\displaystyle\sum_{i \in E} p_n^i} \ .$$

□