Université de Rennes 1
DEA STIR
Signal — Télécommunications — Images — Radar
Option Signal

Examen du cours
“Filtre de Kalman et modèles de Markov cachés”
Jeudi 11 janvier 1996, 8:00 à 9:30
— Corrigé —

Exercice 1 :

On considère le modèle de Markov caché associé aux données suivantes :

- *loi initiale* $\nu = (\nu_i)$

$$\nu_i = \mathbf{P}[X_0 = i] \ , \qquad \text{pour tout } i \in E,$$

- *matrice de transition* $\pi = (\pi_{i,j})$

$$\pi_{i,j} = \mathbf{P}[X_{k+1} = j \mid X_k = i] \ , \qquad \text{pour tout } i,j \in E,$$

- *densités d'observation* $\psi = (\psi_i)$

$$\psi_i(y)\, dy = \mathbf{P}[Y_k \in dy \mid X_k = i] \ , \qquad \text{pour tout } i \in E, \text{ et tout } y \in \mathbf{R}^d.$$

Soit n un instant final *fixé* : on souhaite estimer le nombre N_i de visites de la chaîne de Markov dans l'état i, et le nombre $N_{i,j}$ de transitions effectuées par la chaîne de Markov de l'état i à l'état j, au vu des observations $\mathcal{Y}_n = (Y_0, \cdots, Y_n)$.

(i) **En utilisant la formule**

$$N_i = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}[X_k = i] \ ,$$

calculer l'estimateur $\widehat{N}_i = \mathbf{E}[N_i \mid \mathcal{Y}_n]$ à l'aide des variables forward et backward.

Solution

On a
$$\mathbf{E}[\, N^i \mid Y_0 = y_0, \cdots, Y_n = y_n\,] = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}[\, X_k = i \mid Y_0 = y_0, \cdots, Y_n = y_n\,] \ ,$$
et (voir Proposition 5.11)
$$\mathbf{P}[\, X_k = i, Y_0 \in dy_0, \cdots, Y_n \in dy_n\,] \ = \ \alpha_i^k[y_0, \cdots, y_k] \ \beta_i^k[y_{k+1}, \cdots, y_n] \ dy_0 \cdots dy_n \ .$$
On en déduit que
$$\mathbf{P}[\, X_k = i \mid Y_0, \cdots, Y_n\,] = \frac{1}{P} \ p_i^k \ v_i^k \ ,$$
où (voir Proposition 5.10)
$$P = \sum_{i \in E} p_i^k \ v_i^k \ ,$$
ne dépend pas de k. Finalement
$$\widehat{N^i} = \frac{1}{P} \ \sum_{k=0}^{n-1} p_i^k \ v_i^k \ .$$

□

(ii) **En utilisant la formule**
$$N_{i,j} = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{[X_k = i, X_{k+1} = j]} \ ,$$
calculer l'estimateur $\widehat{N}_{i,j} = \mathbf{E}[N_{i,j} \mid \mathcal{Y}_n]$ à l'aide des variables forward et backward.

Solution

On a
$$\mathbf{E}[\, N^{i,j} \mid Y_0 = y_0, \cdots, Y_n = y_n\,] = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}[\, X_k = i, X_{k+1} = j \mid Y_0 = y_0, \cdots, Y_n = y_n\,] \ ,$$
et en s'inspirant de la démonstration de la Proposition 5.11
$$\mathbf{P}[\, X_k = i, X_{k+1} = j, Y_0 \in dy_0, \cdots, Y_n \in dy_n\,] =$$
$$= \sum_{\substack{i_0, \cdots, i_{k-1} \in E \\ i_{k+2}, \cdots, i_n \in E}} \mathbf{P}[Y_0 \in dy_0, \cdots, Y_n \in dy_n, X_0 = i_0, \cdots, X_{k-1} = i_{k-1},$$
$$X_k = i, X_{k+1} = j, X_{k+2} = i_{k+2}, \cdots, X_n = i_n]$$

$$= \sum_{\substack{i_0,\cdots,i_{k-1}\in E \\ i_{k+2},\cdots,i_n\in E}} \nu_{i_0}\ \pi_{i_0,i_1} \cdots \pi_{i_{k-1},i}\ \pi_{i,j}\ \pi_{j,i_{k+2}} \cdots \pi_{i_{n-1},i_n}$$

$$\psi_{i_0}(y_0) \cdots \psi_{i_{k-1}}(y_{k-1})\ \psi_i(y_k)\ \psi_j(y_{k+1})$$

$$\psi_{i_{k+2}}(y_{k+2}) \cdots \psi_{i_n}(y_n)\ dy_0 \cdots dy_n$$

$$= \sum_{i_0,\cdots,i_{k-1}\in E} \nu_{i_0}\ \pi_{i_0,i_1} \cdots \pi_{i_{k-1},i}\ \psi_{i_0}(y_0) \cdots \psi_{i_{k-1}}(y_{k-1})\ \psi_i(y_k)\ \pi_{i,j}\ \psi_j(y_{k+1})\ \Big[\sum_{i_{k+2},\cdots,i_n\in E}$$

$$\pi_{j,i_{k+2}} \cdots \pi_{i_{n-1},i_n}\ \psi_{i_{k+2}}(y_{k+2}) \cdots \psi_{i_n}(y_n)\ \Big]\ dy_0 \cdots dy_n$$

$$= \alpha_i^k[y_0,\cdots,y_k]\ \pi_{i,j}\ \psi_j(y_{k+1})\ \beta_j^{k+1}[y_{k+2},\cdots,y_n]\ dy_0 \cdots dy_n\ .$$

On en déduit que

$$\mathbf{P}[\, X_k = i, X_{k+1} = j \mid Y_0,\cdots,Y_n\,] = \frac{p_i^k\ \pi_{i,j}\ \psi_j(Y_{k+1})\ v_j^{k+1}}{\displaystyle\sum_{i,j\in E} p_i^k\ \pi_{i,j}\ \psi_j(Y_{k+1})\ v_j^{k+1}}\ .$$

En utilisant l'équation de Baum retrograde (5.3), on remarque que

$$\sum_{i,j\in E} p_i^k\ \pi_{i,j}\ \psi_j(Y_{k+1})\ v_j^{k+1} = \sum_{i\in E} p_i^k\ \Big[\sum_{j\in E} \pi_{i,j}\ \psi_j(Y_{k+1})\ v_j^{k+1}\ \Big] = \sum_{i\in E} p_i^k\ v_i^k = P\ .$$

Finalement

$$\widehat{N}^{i,j} = \pi_{i,j}\ \frac{1}{P}\ \sum_{k=0}^{n-1} p_i^k\ \psi_j(Y_{k+1})\ v_j^{k+1}\ .$$

$\square$

(iii) **Montrer comment le résultat obtenu en (ii) permet de retrouver le résulat obtenu de façon directe en (i).**

Solution

On a évidemment

$$N^i = \sum_{j\in E} N^{i,j}\ .$$

A partir de l'expression obtenue en (ii), et en utilisant l'équation de Baum retrograde (5.3), on obtient

$$\widehat{N}^i = \sum_{j\in E} \widehat{N}^{i,j} = \frac{1}{P}\ \sum_{k=0}^{n-1} p_i^k\ \Big[\sum_{j\in E} \pi_{i,j}\ \psi_j(Y_{k+1})\ v_j^{k+1}\ \Big] = \frac{1}{P}\ \sum_{k=0}^{n-1} p_i^k\ v_i^k\ ,$$

c'est–à–dire qu'on retrouve l'expression obtenue de façon directe en (i).

$\square$

Exercice 2 :

Le but de cet exercice est d'établir les équations du lisseur de Kalman pour le système linéaire suivant :

$$X_{k+1} = F\, X_k + W_k \ ,$$

$$Y_k = H\, X_k + V_k \ ,$$

sous les hypothèses habituelles :

- X_0 *variable aléatoire gaussienne.*
- $\{W_k\}$ *bruit blanc gaussien centré de matrice de covariance* Q *.*
- $\{V_k\}$ *bruit blanc gaussien centré de matrice de covariance* R *inversible.*
- X_0*,* $\{W_k\}$ *et* $\{V_k\}$ *mutuellement indépendants.*

On suppose en outre que la matrice de covariance Q est *inversible.*

Soit n un instant final *fixé* : on souhaite calculer la loi conditionnelle de la variable aléatoire X_k sachant $\mathcal{Y}_n = (Y_0, \cdots, Y_n)$, pour tout instant k antérieur à n.

(i) **Montrer que la loi conditionnelle de X_k sachant $\mathcal{Y}_n$ est gaussienne.**

Solution

Le vecteur aléatoire $(X_k, Y_0, \cdots, Y_n)$ est gaussien, donc la loi conditionnelle de X_k sachant $\mathcal{Y}_n$ est une loi gaussienne.

$\square$

On denote par $\widehat{X}_k^n$ la moyenne de cette loi conditionnelle, i.e.

$$\widehat{X}_k^n \triangleq \mathbf{E}[X_k \mid \mathcal{Y}_n] \ .$$

On suppose que le filtre de Kalman $(\widehat{X}_k, P_k)$ a été calculé dans un premier temps, pour tout $k = 0, \cdots, n$. L'objectif est d'établir une formule de récurrence *rétrograde* pour le calcul de $\widehat{X}_k^n$ à partir de $\widehat{X}_{k+1}^n$, pour tout $k = n-1, \cdots, 0$.

(ii) **Vérifier que $\widehat{X}_n^n = \widehat{X}_n$ à l'instant final $k = n$.**

Solution

A l'instant final $k = n$, on a
$$\widehat{X}_n^n = \mathbf{E}[X_n \mid \mathcal{Y}_n] \ ,$$
d'où le résultat.

$\square$

(iii) **En utilisant la formule de Bayes, montrer que**
$$\mathbf{P}[\, X_k \in dx, X_{k+1} \in dx', Y_0 \in dy_0, \cdots, Y_n \in dy_n \,] =$$
$$= \mathbf{P}[\, X_k \in dx, X_{k+1} \in dx' \mid Y_0 = y_0, \cdots, Y_n = y_n \,] \, \mathbf{P}[\, Y_0 \in dy_0, \cdots, Y_n \in dy_n \,] \ ,$$
et que
$$\mathbf{P}[\, X_k \in dx, X_{k+1} \in dx', Y_0 \in dy_0, \cdots, Y_n \in dy_n \,] =$$
$$= \mathbf{P}[\, Y_{k+1} \in dy_{k+1}, \cdots, Y_n \in dy_n \mid X_k = x, X_{k+1} = x', Y_0 = y_0, \cdots, Y_k = y_k \,]$$
$$\mathbf{P}[\, X_{k+1} \in dx' \mid X_k = x, Y_0 = y_0, \cdots, Y_k = y_k \,]$$
$$\mathbf{P}[\, X_k \in dx \mid Y_0 = y_0, \cdots, Y_k = y_k \,] \, \mathbf{P}[\, Y_0 \in dy_0, \cdots, Y_k \in dy_k \,] \ .$$

Solution

En utilisant la formule de Bayes, on a
$$\mathbf{P}[\, X_k \in dx, X_{k+1} \in dx', Y_0 \in dy_0, \cdots, Y_n \in dy_n \,] =$$
$$= \mathbf{P}[\, X_k \in dx, X_{k+1} \in dx' \mid Y_0 = y_0, \cdots, Y_n = y_n \,] \, \mathbf{P}[\, Y_0 \in dy_0, \cdots, Y_n \in dy_n \,] \ ,$$
et d'autre part
$$\mathbf{P}[\, X_k \in dx, X_{k+1} \in dx', Y_0 \in dy_0, \cdots, Y_n \in dy_n \,] =$$
$$= \mathbf{P}[\, Y_{k+1} \in dy_{k+1}, \cdots, Y_n \in dy_n \mid X_k = x, X_{k+1} = x', Y_0 = y_0, \cdots, Y_k = y_k \,]$$
$$\mathbf{P}[\, X_k \in dx, X_{k+1} \in dx', Y_0 \in dy_0, \cdots, Y_k \in dy_k \,]$$
$$= \mathbf{P}[\, Y_{k+1} \in dy_{k+1}, \cdots, Y_n \in dy_n \mid X_k = x, X_{k+1} = x', Y_0 = y_0, \cdots, Y_k = y_k \,]$$

$$\mathbf{P}[\, X_{k+1} \in dx' \mid X_k = x, Y_0 = y_0, \cdots, Y_k = y_k \,]$$

$$\mathbf{P}[\, X_k \in dx, Y_0 \in dy_0, \cdots, Y_k \in dy_k \,]$$

$$= \mathbf{P}[\, Y_{k+1} \in dy_{k+1}, \cdots, Y_n \in dy_n \mid X_k = x, X_{k+1} = x', Y_0 = y_0, \cdots, Y_k = y_k \,]$$

$$\mathbf{P}[\, X_{k+1} \in dx' \mid X_k = x, Y_0 = y_0, \cdots, Y_k = y_k \,]$$

$$\mathbf{P}[\, X_k \in dx \mid Y_0 = y_0, \cdots, Y_k = y_k \,]\, \mathbf{P}[\, Y_0 \in dy_0, \cdots, Y_k \in dy_k \,] \ .$$

$\square$

(iv) **Montrer que**

$$\mathbf{P}[\, Y_{k+1} \in dy_{k+1}, \cdots, Y_n \in dy_n \mid X_k = x, X_{k+1} = x', Y_0 = y_0, \cdots, Y_k = y_k \,] =$$

$$= \mathbf{P}[\, Y_{k+1} \in dy_{k+1}, \cdots, Y_n \in dy_n \mid X_{k+1} = x' \,]$$

$$= c(x', y_{k+1}, \cdots, y_n)\; dy_{k+1} \cdots dy_n \ .$$

Solution

Le vecteur aléatoire $(Y_{k+1}, \cdots, Y_n)$ dépend de X_{k+1} et de $(W_{k+1}, \cdots, W_n, V_{k+1}, \cdots, V_n)$, et le vecteur aléatoire $(X_{k+1}, X_k, Y_0, \cdots, Y_k)$ dépend de $(X_0, W_1, \cdots, W_k, V_0, \cdots, V_k)$. Compte tenu que $(W_{k+1}, \cdots, W_n, V_{k+1}, \cdots, V_n)$ et $(X_0, W_1, \cdots, W_k, V_0, \cdots, V_k)$ sont des vecteurs aléatoires indépendants, on obtient

$$\mathbf{E}[\psi(Y_{k+1}, \cdots, Y_n) \mid X_k, X_{k+1}, Y_0, \cdots, Y_k] = \mathbf{E}[\psi(Y_{k+1}, \cdots, Y_n) \mid X_{k+1}] \ ,$$

pour toute fonction–test ψ. On en déduit que

$$\mathbf{P}[\, Y_{k+1} \in dy_{k+1}, \cdots, Y_n \in dy_n \mid X_k = x, X_{k+1} = x', Y_0 = y_0, \cdots, Y_k = y_k \,] =$$

$$= \mathbf{P}[\, Y_{k+1} \in dy_{k+1}, \cdots, Y_n \in dy_n \mid X_{k+1} = x' \,] \ .$$

$\square$

(v) **Montrer que**

$$\mathbf{P}[\, X_{k+1} \in dx' \mid X_k = x, Y_0 = y_0, \cdots, Y_k = y_k \,] =$$

$$= \mathbf{P}[\, X_{k+1} \in dx' \mid X_k = x \,]$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^m\, \sqrt{\det Q}}\ \exp\Big\{ -\tfrac{1}{2}\, (x' - F\, x)^*\, Q^{-1}\, (x' - F\, x) \Big\}\ dx' \ .$$

SOLUTION

Le vecteur aléatoire X_{k+1} dépend de X_k et W_k, et le vecteur aléatoire $(X_k, Y_0, \cdots, Y_k)$ dépend de $(X_0, W_1, \cdots, W_{k-1}, V_0, \cdots, V_k)$.

Compte tenu que W_k et $(X_0, W_1, \cdots, W_{k-1}, V_0, \cdots, V_k)$ sont des vecteurs aléatoires indépendants, on obtient

$$\mathbf{E}[\psi(X_{k+1}) \mid X_k, Y_0, \cdots, Y_k] = \mathbf{E}[\psi(X_{k+1}, \cdots, Y_n) \mid X_k] \ ,$$

pour toute fonction–test ψ. On en déduit que

$$\mathbf{P}[\, X_{k+1} \in dx' \mid X_k = x, Y_0 = y_0, \cdots, Y_k = y_k \,] = \mathbf{P}[\, X_{k+1} \in dx' \mid X_k = x \,] \ .$$

En utilisant l'équation

$$X_{k+1} = F\, X_k + W_k \ ,$$

et l'indépendance des variables aléatoires X_k et W_k, on vérifie que la loi conditionnelle du vecteur aléatoire X_{k+1} sachant $X_k = x$ est une loi gaussienne, de moyenne $F\, x$ et de matrice de covariance Q.

□

(vi) **Montrer que**

$$\mathbf{P}[\, X_k \in dx \mid \mathcal{Y}_k \,] =$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^m \, \sqrt{\det P_k}} \ \exp\Big\{ -\tfrac{1}{2}\, (x - \widehat{X}_k)^* \, P_k^{-1} \, (x - \widehat{X}_k) \Big\} \ dx \ .$$

SOLUTION

Par définition du filtre de Kalman, la loi conditionnelle de X_k sachant $\mathcal{Y}_k$ est une loi gaussienne, de moyenne $\widehat{X}_k$ et de matrice de covariance P_k, d'où le résultat.

□

(vii) **Déduire de (iii), (iv), (v) et (vi) que**

$$\mathbf{P}[\, X_k \in dx, X_{k+1} \in dx' \mid \mathcal{Y}_n \,] =$$

$$= a(Y_0, \cdots, Y_n)\ c(x', Y_{k+1}, \cdots, Y_n)\ \exp\Big\{ -\tfrac{1}{2}\, (x' - F\, x)^* \, Q^{-1} \, (x' - F\, x) \Big\}$$

$$\exp\Big\{ -\tfrac{1}{2}\, (x - \widehat{X}_k)^* \, P_k^{-1} \, (x - \widehat{X}_k) \Big\} \ dx\, dx' \ .$$

Solution

Il résulte de (iii), et des résultats obtenus en (iv) et (v), que

$$\mathbf{P}[\, X_k \in dx, X_{k+1} \in dx' \mid Y_0 = y_0, \cdots, Y_n = y_n \,]\; \mathbf{P}[\, Y_0 \in dy_0, \cdots, Y_n \in dy_n \,] =$$

$$= c(x', y_{k+1}, \cdots, y_n)\; dy_{k+1} \cdots dy_n$$

$$\exp\Big\{ -\tfrac{1}{2}\, (x' - F\,x)^*\, Q^{-1}\, (x' - F\,x) \Big\}\; dx'$$

$$\mathbf{P}[\, X_k \in dx \mid Y_0 = y_0, \cdots, Y_k = y_k \,]\; \mathbf{P}[\, Y_0 \in dy_0, \cdots, Y_k \in dy_k \,] \;.$$

En utilisant le résultat obtenu en (vi), on en déduit que

$$\mathbf{P}[\, X_k \in dx, X_{k+1} \in dx' \mid \mathcal{Y}_n \,] =$$

$$= a(Y_0, \cdots, Y_n)\; c(x', Y_{k+1}, \cdots, Y_n)\; \exp\Big\{ -\tfrac{1}{2}\, (x' - F\,x)^*\, Q^{-1}\, (x' - F\,x) \Big\}\; dx'$$

$$\mathbf{P}[\, X_k \in dx \mid \mathcal{Y}_k]$$

$$= a(Y_0, \cdots, Y_n)\; c(x', Y_{k+1}, \cdots, Y_n)\; \exp\Big\{ -\tfrac{1}{2}\, (x' - F\,x)^*\, Q^{-1}\, (x' - F\,x) \Big\}$$

$$\exp\Big\{ -\tfrac{1}{2}\, (x - \widehat{X}_k)^*\, P_k^{-1}\, (x - \widehat{X}_k) \Big\}\; dx\, dx' \;.$$

□

(viii) **Expliquer pourquoi la moyenne $(\widehat{X}_k^n, \widehat{X}_{k+1}^n)$ de cette loi conditionnelle coïncide avec le maximum de la fonction**

$$\phi(x, x') \;=\; c(x', Y_{k+1}, \cdots, Y_n)\; \exp\Big\{ -\tfrac{1}{2}\, (x' - F\,x)^*\, Q^{-1}\, (x' - F\,x) \Big\}$$

$$\exp\Big\{ -\tfrac{1}{2}\, (x - \widehat{X}_k)^*\, P_k^{-1}\, (x - \widehat{X}_k) \Big\} \;.$$

Solution

La loi conditionnelle du vecteur (X_k, X_{k+1}) sachant $\mathcal{Y}_n$ est une loi gaussienne. La moyenne et le mode (point qui maximise la densité) d'une loi gaussienne coïncident, d'où le résultat.

□

(ix) **En déduire que $\widehat{X}_k^n$ coïncide avec le minimum de la fonction**

$$J(x) = \tfrac{1}{2}\, (\widehat{X}_{k+1}^n - F\,x)^*\, Q^{-1}\, (\widehat{X}_{k+1}^n - F\,x) + \tfrac{1}{2}\, (x - \widehat{X}_k)^*\, P_k^{-1}\, (x - \widehat{X}_k) \;.$$

Solution

Par définition
$$\phi(\widehat{X}_k^n, \widehat{X}_{k+1}^n) \geq \phi(x, x') \ ,$$
pour tout x, x' dans $\mathbf{R}^m$. En particulier pour $x' = \widehat{X}_{k+1}^n$
$$\phi(\widehat{X}_k^n, \widehat{X}_{k+1}^n) \geq \phi(x, \widehat{X}_{k+1}^n) \ ,$$
pour tout x dans $\mathbf{R}^m$. On en déduit que $\widehat{X}_k^n$ maximise la fonction $x \mapsto \log \phi(x, \widehat{X}_{k+1}^n)$, c'est–à–dire minimise la fonction
$$J(x) = \tfrac{1}{2} \, (\widehat{X}_{k+1}^n - F\, x)^* \, Q^{-1} \, (\widehat{X}_{k+1}^n - F\, x) + \tfrac{1}{2} \, (x - \widehat{X}_k)^* \, P_k^{-1} \, (x - \widehat{X}_k) \ .$$

□

(x) **En déduire que $\widehat{X}_k^n$ vérifie**
$$[\, F^* \, Q^{-1} \, F + P_k^{-1} \,] \, \widehat{X}_k^n = F^* \, Q^{-1} \, \widehat{X}_{k+1}^n + P_k^{-1} \, \widehat{X}_k \ ,$$
c'est–à–dire que
$$\widehat{X}_k^n = \widehat{X}_k + S_k \, (\widehat{X}_{k+1}^n - F \, \widehat{X}_k) \ ,$$
avec
$$S_k = P_k \, F^* \, [\, F \, P_k \, F^* + Q \,]^{-1} \ .$$

Solution

La caractérisation de $\widehat{X}_k^n$ obtenue en (ix), donne immédiatement
$$[\, F^* \, Q^{-1} \, F + P_k^{-1} \,] \, \widehat{X}_k^n = F^* \, Q^{-1} \, \widehat{X}_{k+1}^n + P_k^{-1} \, \widehat{X}_k \ .$$
En utilisant le Lemme 1.1, on obtient
$$\begin{aligned}
\widehat{X}_k^n &= [\, P_k - P_k \, F^* \, (F \, P_k \, F^* + Q)^{-1} \, F \, P_k \,] \, [\, F^* \, Q^{-1} \, \widehat{X}_{k+1}^n + P_k^{-1} \, \widehat{X}_k \,] \\
&= P_k \, F^* \, Q^{-1} \, \widehat{X}_{k+1}^n + \widehat{X}_k - P_k \, F^* \, (F \, P_k \, F^* + Q)^{-1} \, F \, P_k \, F^* \, Q^{-1} \, \widehat{X}_{k+1}^n \\
&\qquad - P_k \, F^* \, (F \, P_k \, F^* + Q)^{-1} \, F \, \widehat{X}_k \\
&= \widehat{X}_k + P_k \, F^* \, (F \, P_k \, F^* + Q)^{-1} \, [\, (F \, P_k \, F^* + Q) \, Q^{-1} \, \widehat{X}_{k+1}^n \\
&\qquad\qquad - F \, P_k \, F^* \, Q^{-1} \, \widehat{X}_{k+1}^n - F \, \widehat{X}_k \,] \\
&= \widehat{X}_k + P_k \, F^* \, (F \, P_k \, F^* + Q)^{-1} \, (\widehat{X}_{k+1}^n - F \, \widehat{X}_k) \\
&= \widehat{X}_k + S_k \, (\widehat{X}_{k+1}^n - F \, \widehat{X}_k) \ .
\end{aligned}$$

□

Annexe

La démonstration de (iv) et (v) repose sur le résultat (intuitivement évident) suivant, qui est une extension du Corollaire A.5.

Résultat *Soit X, Y et Z trois vecteurs aléatoires. Si $(X, Y) \perp Z$ alors*

$$\mathbf{E}[\psi(X, Z) \mid X, Y] = \mathbf{E}[\psi(X, Z) \mid X] \ ,$$

pour toute fonction–test ψ.

PREUVE. Il suffit de montrer que la propriété est vraie pour toute fonction–test ψ de la forme $\psi(x, z) = \xi(x)\, \chi(z)$. Or en utilisant le Corollaire A.5, on a

$$\mathbf{E}[\xi(X)\, \chi(Z) \mid X, Y] = \xi(X)\ \mathbf{E}[\chi(Z) \mid X, Y] = \xi(X)\ \mathbf{E}[\chi(Z)] \ ,$$

et

$$\mathbf{E}[\xi(X)\, \chi(Z) \mid X] = \xi(X)\ \mathbf{E}[\chi(Z) \mid X] = \xi(X)\ \mathbf{E}[\chi(Z)] \ . \qquad \square$$