Université de Rennes 1
Master Recherche SISEA

Examen du cours UE S3-2
"Filtre de Kalman et modèles de Markov cachés"
Jeudi 15 janvier 2015, 14:00 à 16:00
— Corrigé —

Problème

Le but de ce problème est d'établir les équations du lisseur de Kalman, vu comme estimateur du maximum a posteriori (MAP), et en utilisant un principe de programmation dynamique *similaire* à l'algorithme de Viterbi vu en cours et adapté ici au cas des systèmes linéaires gaussiens.

On considère une suite d'états cachés $\{X_k\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, vérifiant

$$X_k = F_k\, X_{k-1} + W_k \ ,$$

où $\{W_k\}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, et une suite d'observations $\{Y_k\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, vérifiant

$$Y_k = H_k\, X_k + V_k \ ,$$

et on suppose que

- la condition initiale X_0 est un vecteur aléatoire gaussien, de moyenne $\bar{X}_0$ et de matrice de covariance *inversible* Q_0^X,
- la suite $\{W_k\}$ est un bruit blanc gaussien, de matrice de covariance *inversible* Q_k^W,
- la suite $\{V_k\}$ est un bruit blanc gaussien, de matrice de covariance *inversible* Q_k^V,
- la condition initiale X_0 et les suites $\{W_k\}$ et $\{V_k\}$ sont mutuellement indépendants.

On dispose de toutes les observations

$$Y_{0:n} = (Y_0, Y_1, \cdots, Y_n) \ ,$$

et l'objectif est d'estimer de façon optimale le vecteur aléatoire X_k à partir de $Y_{0:n}$, pour un instant k intermédiaire entre l'instant initial 0 et l'instant final n. Si on adopte le critère du minimum de variance, il s'agit donc de calculer la distribution de probabilité conditionnelle du vecteur aléatoire X_k sachant $Y_{0:n}$. Comme le cadre est gaussien, cette distribution de probabilité conditionnelle est gaussienne, et il suffit de calculer la moyenne

$$\widehat{X}_k^n = \mathbb{E}[X_k \mid Y_{0:n}] \ .$$

On suppose que les estimateurs (prédicteur et filtre, respectivement)

$$\widehat{X}_k^- = \mathbb{E}[X_k \mid Y_{0:k-1}] \qquad \text{et} \qquad \widehat{X}_k = \mathbb{E}[X_k \mid Y_{0:k}] \ ,$$

et les matrices de covariance d'erreur associées

$$P_k^- = \mathbb{E}[(X_k - \widehat{X}_k^-)\,(X_k - \widehat{X}_k^-)^*] \qquad \text{et} \qquad P_k = \mathbb{E}[(X_k - \widehat{X}_k)\,(X_k - \widehat{X}_k)^*] \ ,$$

ont déjà été calculés dans une première phase et sont disponibles, pour tout instant k intermédiaire entre l'instant initial 0 et l'instant final n.

(i) Montrer que $\widehat{X}_n^n = \widehat{X}_n$ pour $k = n$. En d'autres termes, le lisseur et le filtre coïncident à l'instant final.

SOLUTION

Clairement

$$\widehat{X}_n^n = \mathbb{E}[X_n \mid Y_{0:n}] = \widehat{X}_n \ .$$

□

On rappelle que la distribution de probabilité conditionnelle

$$\mathbb{P}[X_0 \in dx_0, \cdots, X_n \in dx_n \mid Y_0, \cdots, Y_n] \ ,$$

est gausienne, et on suppose que cette distribution de probabilité possède une densité (par rapport à la mesure de Lebesgue), notée $p(x_0, \cdots, x_n \mid Y_0, \cdots, Y_n)$.

(ii) Montrer que la moyenne conditionnelle $(\widehat{X}_0^n, \cdots, \widehat{X}_n^n)$ coïncide avec le mode conditionnel $(X_0^{\mathrm{MAP}}, \cdots, X_n^{\mathrm{MAP}})$, également appelé estimateur du maximum a posteriori (MAP), défini comme le maximum de la fonction

$$(x_0, \cdots, x_n) \longmapsto p(x_0, \cdots, x_n \mid Y_0, \cdots, Y_n) \ ,$$

c'est–à–dire

$$(X_0^{\mathrm{MAP}}, \cdots, X_n^{\mathrm{MAP}}) = \operatorname*{argmax}_{x_0, \cdots, x_n} \ p(x_0, \cdots, x_n \mid Y_0, \cdots, Y_n) \ .$$

Solution

Une densité gaussienne est nécessairement de la forme

$$\frac{1}{\sqrt{\det(2\pi\Sigma)}}\ \exp\{-\tfrac{1}{2}\,(x-\mu)^*\,\Sigma^{-1}\,(x-\mu)\}\ ,$$

où le vecteur μ désigne la moyenne, et la matrice Σ symétrique définie positive désigne la matrice de covariance. On remarque que le maximum de cette densité est atteint pour $x = \mu$.

□

On se propose donc dans la suite du problème d'établir les équations pour calculer l'estimateur MAP, défini de manière équivalente comme le minimum de la fonction

$$(x_0,\cdots,x_n) \longmapsto -\log p(x_0,\cdots,x_n \mid Y_0,\cdots,Y_n)\ ,$$

c'est–à–dire

$$(X_0^{\rm MAP},\cdots,X_n^{\rm MAP}) = \operatorname*{argmin}_{x_0,\cdots,x_n}\,\{-\log p(x_0,\cdots,x_n \mid Y_0,\cdots,Y_n)\,\}\ .$$

On rappelle que si la suite $(x_0^{\rm opt},\cdots,x_k^{\rm opt})$ atteint le minimum de la fonction

$$(x_0,\cdots,x_k) \longmapsto -\log p(x_0,\cdots,x_k \mid Y_0,\cdots,Y_k)\ ,$$

alors nécessairement $x_k^{\rm opt}$ atteint le minimum de la fonction

$$x_k \longmapsto \min_{x_0,\cdots,x_{k-1}}\ \{-\log p(x_0,\cdots,x_{k-1},x_k \mid Y_0,\cdots,Y_k)\,\}\ ,$$

ce qui justifie d'introduire la fonction *valeur*

$$V_k(x_k) = \min_{x_0,\cdots,x_{k-1}}\ \{-\log p(x_0,\cdots,x_{k-1},x_k \mid Y_0,\cdots,Y_k)\,\}\ ,$$

pour tout $x_k \in \mathbb{R}^m$. On admet l'expression suivante (à une constante multiplicative près) pour la densité conditionnelle

$$\begin{aligned} p(x_0,&\cdots,x_{k-1},x_k \mid Y_0,\cdots,Y_k) \\ &= \exp\{-\tfrac{1}{2}\,(x_0-\bar X_0)^*\,(Q_0^X)^{-1}\,(x_0-\bar X_0)\} \\ &\qquad \prod_{l=1}^k \exp\{-\tfrac{1}{2}\,(x_l-F_l\,x_{l-1})^*\,(Q_l^W)^{-1}\,(x_l-F_l\,x_{l-1})\} \\ &\qquad \prod_{l=0}^k \exp\{-\tfrac{1}{2}\,(Y_l-H_l\,x_l)^*\,(Q_l^V)^{-1}\,(Y_l-H_l\,x_l)\}\ , \end{aligned}$$

valide pour toute suite $x_0,\cdots,x_k$.

(iii) Montrer que la suite $\{V_k\}$ vérifie la relation de récurrence

$$V_k(x_k) = \min_{x_{k-1}} \{V_{k-1}(x_{k-1}) + \tfrac{1}{2}\,(x_k - F_k\,x_{k-1})^*\,(Q_k^W)^{-1}\,(x_k - F_k\,x_{k-1})\}$$
$$+ \tfrac{1}{2}\,(Y_k - H_k\,x_k)^*\,(Q_k^V)^{-1}\,(Y_k - H_k\,x_k)\ ,$$

pour tout $x_k \in \mathbb{R}^m$, avec la condition initiale

$$V_0(x_0) = \tfrac{1}{2}\,(x_0 - \bar{X}_0)^*\,(Q_0^X)^{-1}\,(x_0 - \bar{X}_0)$$
$$+ \tfrac{1}{2}\,(Y_0 - H_0\,x_0)^*\,(Q_0^V)^{-1}\,(Y_0 - H_0\,x_0)\ ,$$

pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^m$.

Solution

On vérifie que

$$\begin{aligned}
&p(x_0, \cdots, x_{k-1}, x_k \mid Y_0, \cdots, Y_k)\\
&\quad = \exp\{-\tfrac{1}{2}\,(x_0 - \bar{X}_0)^*\,(Q_0^X)^{-1}\,(x_0 - \bar{X}_0)\}\\
&\qquad \prod_{l=1}^{k} \exp\{-\tfrac{1}{2}\,(x_l - F_l\,x_{l-1})^*\,(Q_l^W)^{-1}\,(x_l - F_l\,x_{l-1})\}\\
&\qquad \prod_{l=0}^{k} \exp\{-\tfrac{1}{2}\,(Y_l - H_l\,x_l)^*\,(Q_l^V)^{-1}\,(Y_l - H_l\,x_l)\}\ ,
\end{aligned}$$

à une constante multiplicative près, pour toute suite $(x_0, \cdots, x_k)$. On en déduit que

$$\begin{aligned}
&-\log p(x_0, \cdots, x_{k-1}, x_k \mid Y_0, \cdots, Y_k)\\
&\quad = \tfrac{1}{2}\,(x_0 - \bar{X}_0)^*\,(Q_0^X)^{-1}\,(x_0 - \bar{X}_0)\\
&\qquad + \tfrac{1}{2}\,\sum_{l=1}^{k}(x_l - F_l\,x_{l-1})^*\,(Q_l^W)^{-1}\,(x_l - F_l\,x_{l-1})\\
&\qquad + \tfrac{1}{2}\,\sum_{l=0}^{k}(Y_l - H_l\,x_l)^*\,(Q_l^V)^{-1}\,(Y_l - H_l\,x_l)\\
&\quad = -\log p(x_0, \cdots, x_{k-2}, x_{k-1} \mid Y_0, \cdots, Y_{k-1})\\
&\qquad + \tfrac{1}{2}\,(x_k - F_k\,x_{k-1})^*\,(Q_k^W)^{-1}\,(x_k - F_k\,x_{k-1})\\
&\qquad + \tfrac{1}{2}\,(Y_k - H_k\,x_k)^*\,(Q_k^V)^{-1}\,(Y_k - H_k\,x_k)\ ,
\end{aligned}$$

à une constante additive près, pour tout suite $(x_0, \cdots, x_k)$.

En minimisant d'abord par rapport à $x_0, \cdots, x_{k-2}$, on obtient

$$\min_{x_0,\cdots,x_{k-2}} \{-\log p(x_0,\cdots,x_{k-1},x_k \mid Y_0,\cdots,Y_k)\}$$

$$= V_{k-1}(x_{k-1}) + \tfrac{1}{2}\,(x_k - F_k\,x_{k-1})^*\,(Q_k^W)^{-1}\,(x_k - F_k\,x_{k-1})$$

$$+ \tfrac{1}{2}\,(Y_k - H_k\,x_k)^*\,(Q_k^V)^{-1}\,(Y_k - H_k\,x_k)\ ,$$

pour tout x_{k-1}, x_k. En minimisant ensuite par rapport à x_{k-1}, on obtient

$$\begin{aligned} V_k(x_k) &= \min_{x_0,\cdots,x_{k-1}} \{-\log p(x_0,\cdots,x_{k-1},x_k \mid Y_0,\cdots,Y_k)\} \\ &= \min_{x_{k-1}} \{V_{k-1}(x_{k-1}) + \tfrac{1}{2}\,(x_k - F_k\,x_{k-1})^*\,(Q_k^W)^{-1}\,(x_k - F_k\,x_{k-1})\} \\ &\qquad + \tfrac{1}{2}\,(Y_k - H_k\,x_k)^*\,(Q_k^V)^{-1}\,(Y_k - H_k\,x_k)\ , \end{aligned}$$

pour tout x_k.

□

La suite $\{V_k\}$ est instrumentale et permet de définir à chaque instant k la fonction

$$I_{k-1}(x_k) = \operatorname*{argmin}_{x_{k-1}} \{V_{k-1}(x_{k-1}) + \tfrac{1}{2}\,(x_k - F_k\,x_{k-1})^*\,(Q_k^W)^{-1}\,(x_k - F_k\,x_{k-1})\}\ ,$$

qui s'interprète comme un pointeur vers un état à l'instant précédent $(k-1)$.

(iv) Montrer que la suite $\{X_k^{\rm MAP}\}$ vérifie la relation de récurrente rétrograde

$$X_{k-1}^{\rm MAP} = I_{k-1}(X_k^{\rm MAP})\ ,$$

avec la condition initiale

$$X_n^{\rm MAP} = \operatorname*{argmin}_{x_n}\ V_n(x_n)\ .$$

Solution

Si la suite $(x_0^{\rm opt},\cdots,x_{n-1}^{\rm opt},x_n^{\rm opt})$ atteint le minimum de la fonction

$$(x_0,\cdots,x_{n-1},x_n) \longmapsto -\log p(x_0,\cdots,x_{n-1},x_n \mid Y_0,\cdots,Y_n)\ ,$$

alors nécessairement $x_n^{\rm opt}$ atteint le minimum de la fonction

$$x \longmapsto \min_{x_0,\cdots,x_{n-1}} \{-\log p(x_0,\cdots,x_{n-1},x \mid Y_0,\cdots,Y_n)\}\ ,$$

c'est–à–dire que

$$x_n^{\rm opt} = \mathop{\rm argmin}_x V_n(x) \ .$$

Si la suite $(x_0^{\rm opt}, \cdots, x_{k-1}^{\rm opt}, x_k^{\rm opt}, \cdots, x_n^{\rm opt})$ atteint le minimum de la fonction

$$(x_0, \cdots, x_{k-1}, x_k, \cdots, x_n) \longmapsto - \log p(x_0, \cdots, x_{k-1}, x_k, \cdots, x_n \mid Y_0, \cdots, Y_n) \ ,$$

alors nécessairement la suite $(x_0^{\rm opt}, \cdots, x_{k-1}^{\rm opt})$ atteint le minimum de la fonction

$$(x_0, \cdots, x_{k-1}) \longmapsto - \log p(x_0, \cdots, x_{k-1}, x_k^{\rm opt}, \cdots, x_n^{\rm opt} \mid Y_0, \cdots, Y_n) \ .$$

On vérifie que

$$\begin{aligned}
& - \log p(x_0, \cdots, x_{k-1}, x_k^{\rm opt}, \cdots, x_n^{\rm opt} \mid Y_0, \cdots, Y_n) \\
& \quad = \tfrac{1}{2}\, (x_0 - \bar{X}_0)^* \, (Q_0^X)^{-1} \, (x_0 - \bar{X}_0) \\
& \qquad\qquad + \tfrac{1}{2} \sum_{l=1}^{k-1} (x_l - F_l \, x_{l-1})^* \, (Q_l^W)^{-1} \, (x_l - F_l \, x_{l-1}) \\
& \qquad\qquad + \tfrac{1}{2}\, (x_k^{\rm opt} - F_k \, x_{k-1})^* \, (Q_k^W)^{-1} \, (x_k^{\rm opt} - F_k \, x_{k-1}) \\
& \qquad\qquad + \tfrac{1}{2} \sum_{l=k+1}^{n} (x_l^{\rm opt} - F_l \, x_{l-1}^{\rm opt})^* \, (Q_l^W)^{-1} \, (x_l^{\rm opt} - F_l \, x_{l-1}^{\rm opt}) \\
& \qquad\qquad + \tfrac{1}{2} \sum_{l=0}^{k-1} (Y_l - H_l \, x_l)^* \, (Q_l^V)^{-1} \, (Y_l - H_l \, x_l) \\
& \qquad\qquad + \tfrac{1}{2} \sum_{l=k}^{n} (Y_l - H_l \, x_l^{\rm opt})^* \, (Q_l^V)^{-1} \, (Y_l - H_l \, x_l^{\rm opt}) \\
& \quad = - \log p(x_0, \cdots, x_{k-2}, x_{k-1} \mid Y_0, \cdots, Y_{k-1}) \\
& \qquad\qquad + \tfrac{1}{2}\, (x_k^{\rm opt} - F_k \, x_{k-1})^* \, (Q_k^W)^{-1} \, (x_k^{\rm opt} - F_k \, x_{k-1}) \ ,
\end{aligned}$$

à une constante additive près, pour tout suite $(x_0, \cdots, x_{k-1})$. On en déduit que la suite $(x_0^{\rm opt}, \cdots, x_{k-1}^{\rm opt})$ atteint le minimum de la fonction

$$\begin{aligned}
(x_0, \cdots, x_{k-1}) \ \longmapsto \ & - \log p(x_0, \cdots, x_{k-1} \mid Y_0, \cdots, Y_{k-1}) \\
& + \tfrac{1}{2}\, (x_k^{\rm opt} - F_k \, x_{k-1})^* \, (Q_k^W)^{-1} \, (x_k^{\rm opt} - F_k \, x_{k-1}) \ ,
\end{aligned}$$

et nécessairement $x_{k-1}^{\rm opt}$ atteint le minimum de la fonction

$$\begin{aligned}
x \ \longmapsto \ & \min_{x_0, \cdots, x_{k-2}} \{ - \log p(x_0, \cdots, x_{k-2}, x \mid Y_0, \cdots, Y_{k-1}) \} \\
& + \tfrac{1}{2}\, (x_k^{\rm opt} - F_k \, x)^* \, (Q_k^W)^{-1} \, (x_k^{\rm opt} - F_k \, x) \ ,
\end{aligned}$$

c'est–à–dire que $x_{k-1}^{\rm opt}$ atteint le minimum de la fonction

$$x \longmapsto V_{k-1}(x) + \tfrac{1}{2}\,(x_k^{\rm opt} - F_k\,x)^*\,(Q_k^W)^{-1}\,(x_k^{\rm opt} - F_k\,x)\ ,$$

en d'autres termes

$$x_{k-1}^{\rm opt} = \mathop{\rm argmin}_x\ \{V_{k-1}(x) + \tfrac{1}{2}\,(x_k^{\rm opt} - F_k\,x)^*\,(Q_k^W)^{-1}\,(x_k^{\rm opt} - F_k\,x)\} = I_{k-1}(x_k^{\rm opt})\ . \qquad \Box$$

$\Box$

On propose de montrer par récurrence que la fonction valeur vérifie

$$V_k(x_k) = \tfrac{1}{2}\,(x_k - \widehat{X}_k)^*\,P_k^{-1}\,(x_k - \widehat{X}_k)\ , \qquad (\star)$$

pour tout $x_k \in \mathbb{R}^m$, à une constante additive près, et que

$$I_{k-1}(x_k) = \widehat{X}_{k-1} + L_k\,(x_k - \widehat{X}_k^-) \qquad \text{avec} \qquad L_k = P_{k-1}\,F_k^*\,(P_k^-)^{-1}\ ,$$

pour tout $x_k \in \mathbb{R}^m$.

(v) On suppose que l'hypothèse de récurrence $(\star)$ est vérifiée à l'instant $(k-1)$. Montrer que

$$\min_{x_{k-1}}\ \{V_{k-1}(x_{k-1}) + \tfrac{1}{2}\,(x_k - F_k\,x_{k-1})^*\,(Q_k^W)^{-1}\,(x_k - F_k\,x_{k-1})\}$$

$$= \tfrac{1}{2}\,(x_k - \widehat{X}_k^-)^*\,(P_k^-)^{-1}\,(x_k - \widehat{X}_k^-)\ ,$$

et que

$$\begin{aligned} I_{k-1}(x_k) &= \mathop{\rm argmin}_{x_{k-1}}\ \{V_{k-1}(x_{k-1}) + \tfrac{1}{2}\,(x_k - F_k\,x_{k-1})^*\,(Q_k^W)^{-1}\,(x_k - F_k\,x_{k-1})\} \\ &= \widehat{X}_{k-1} + L_k\,(x_k - \widehat{X}_k^-)\ , \end{aligned}$$

pour tout $x_k \in \mathbb{R}^m$.

Solution

Si l'hypothèse de récurrence est vérifiée à l'instant $(k-1)$, alors

$$\begin{aligned} &V_{k-1}(x_{k-1}) + \tfrac{1}{2}\,(x_k - F_k\,x_{k-1})^*\,(Q_k^W)^{-1}\,(x_k - F_k\,x_{k-1}) \\ &= \tfrac{1}{2}\,(x_{k-1} - \widehat{X}_{k-1})^*\,P_{k-1}^{-1}\,(x_{k-1} - \widehat{X}_{k-1}) \\ &\qquad + \tfrac{1}{2}\,(x_k - F_k\,x_{k-1})^*\,(Q_k^W)^{-1}\,(x_k - F_k\,x_{k-1}) \\ &= \tfrac{1}{2}\,x_{k-1}^*\,(P_{k-1}^{-1} + F_k\,(Q_k^W)^{-1}\,F_k^*)\,x_{k-1} \\ &\qquad - (P_{k-1}^{-1}\,\widehat{X}_{k-1} + F_k^*\,(Q_k^W)^{-1}\,x_k)^*\,x_{k-1} \\ &\qquad + \tfrac{1}{2}\,(\widehat{X}_{k-1}^*\,P_{k-1}^{-1}\,\widehat{X}_{k-1} + x_k^*\,(Q_k^W)^{-1}\,x_k) \\ &= \tfrac{1}{2}\,x_{k-1}^*\,A\,x_{k-1} - b^*\,x_{k-1} + \tfrac{1}{2}\,c \\ &= \tfrac{1}{2}\,(x_{k-1} - A^{-1}\,b)^*\,A\,(x_{k-1} - A^{-1}\,b) + \tfrac{1}{2}\,(c - b^*\,A^{-1}\,b)\ , \end{aligned}$$

avec

$$A = P_{k-1}^{-1} + F_k\,(Q_k^W)^{-1}\,F_k^*\ ,$$

$$b = P_{k-1}^{-1}\,\widehat{X}_{k-1} + F_k^*\,(Q_k^W)^{-1}\,x_k\ ,$$

$$c = \widehat{X}_{k-1}^*\,P_{k-1}^{-1}\,\widehat{X}_{k-1} + x_k^*\,(Q_k^W)^{-1}\,x_k\ ,$$

et on en conclut immédiatement que

$$\min_{x_{k-1}} \{V_{k-1}(x_{k-1}) + \tfrac{1}{2}\,(x_k - F_k\,x_{k-1})^*\,(Q_k^W)^{-1}\,(x_k - F_k\,x_{k-1})\} = \tfrac{1}{2}\,(c - b^*\,A^{-1}\,b)\ ,$$

et

$$I_{k-1}(x_k) = \operatorname*{argmin}_{x_{k-1}} \{V_{k-1}(x_{k-1}) + \tfrac{1}{2}\,(x_k - F_k\,x_{k-1})^*\,(Q_k^W)^{-1}\,(x_k - F_k\,x_{k-1})\} = A^{-1}\,b\ .$$

Il suffit donc d'évaluer le vecteur $A^{-1}\,b$ et le scalaire $\frac{1}{2}\,(c - b^*\,A^{-1}\,b)$.

On a d'abord, en utilisant d'après le lemme d'inversion matricielle

$$\begin{aligned}
A^{-1} &= (P_{k-1}^{-1} + F_k\,(Q_k^W)^{-1}\,F_k^*)^{-1} \\
&= P_{k-1} - P_{k-1}\,F_k^*\,(F_k^*\,P_{k-1}\,F_k + Q_k^W)^{-1}\,F_k\,P_{k-1} \\
&= P_{k-1} - P_{k-1}\,F_k^*\,(P_k^-)^{-1}\,F_k\,P_{k-1} = (I - L_k\,F_k)\,P_{k-1}\ ,
\end{aligned}$$

et on en déduit que

$$A^{-1}\,b = (I - L_k\,F_k)\,P_{k-1}\,(P_{k-1}^{-1}\,\widehat{X}_{k-1} + F_k^*\,(Q_k^W)^{-1}\,x_k)\ .$$

On vérifie que

$$(I - L_k\,F_k)\,\widehat{X}_{k-1} = \widehat{X}_{k-1} - L_k\,\widehat{X}_k^-\ ,$$

et

$$\begin{aligned}
(I - L_k\,F_k)\,P_{k-1}\,F_k^* &= P_{k-1}\,F_k^* - L_k\,(F_k\,P_{k-1}\,F_k^* + Q_k^W - Q_k^W) \\
&= P_{k-1}\,F_k^* - L_k\,P_k^- + L_k\,Q_k^W = L_k\,Q_k^W\ ,
\end{aligned}$$

compte tenu que $L_k\,P_k^- = P_{k-1}\,F_k^*$, de sorte que

$$A^{-1}\,b = (I - L_k\,F_k)\,\widehat{X}_{k-1} + L_k\,x_k = \widehat{X}_{k-1} + L_k\,(x_k - \widehat{X}_k^-)\ .$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned}
b^*\,A^{-1}\,b &= (P_{k-1}^{-1}\,\widehat{X}_{k-1} + F_k^*\,(Q_k^W)^{-1}\,x_k)^*\,((I - L_k\,F_k)\,\widehat{X}_{k-1} + L_k\,x_k) \\
&= x_k^*\,(Q_k^W)^{-1}\,F_k\,L_k\,x_k \\
&\qquad + \widehat{X}_{k-1}^*\,P_{k-1}^{-1}\,L_k\,x_k + x_k^*\,(Q_k^W)^{-1}\,F_k\,(I - L_k\,F_k)\,\widehat{X}_{k-1} \\
&\qquad + \widehat{X}_{k-1}^*\,P_{k-1}^{-1}\,(I - L_k\,F_k)\,\widehat{X}_{k-1}\ ,
\end{aligned}$$

et

$$\tfrac{1}{2}\,(c - b^*\,A^{-1}\,b) \;=\; \tfrac{1}{2}\,x_k^*\,(Q_k^W)^{-1}\,(I - F_k\,L_k)\,x_k$$
$$- \tfrac{1}{2}\,\widehat{X}_{k-1}^*\,P_{k-1}^{-1}\,L_k\,x_k - \tfrac{1}{2}\,x_k^*\,(Q_k^W)^{-1}\,(I - F_k\,L_k)\;F_k\,\widehat{X}_{k-1}$$
$$+ \tfrac{1}{2}\,\widehat{X}_{k-1}^*\,P_{k-1}^{-1}\,L_k\,F_k\,\widehat{X}_{k-1}\;.$$

On vérifie que

$$F_k\,L_k = F_k\,P_{k-1}\,F_k^*\,(P_k^-)^{-1} = (F_k\,P_{k-1}\,F_k^* + Q_k^W - Q_k^W)\;(P_k^-)^{-1} = I - Q_k^W\;(P_k^-)^{-1}\;,$$

donc

$$(Q_k^W)^{-1}\;(I - F_k\,L_k) = (P_k^-)^{-1}\;,$$

et

$$P_{k-1}^{-1}\;L_k = F_k^*\;(P_k^-)^{-1}\;.$$

On en déduit que

$$\tfrac{1}{2}\,(c - b^*\,A^{-1}\,b) \;=\; \tfrac{1}{2}\,x_k^*\,(P_k^-)^{-1}\,x_k$$
$$- \tfrac{1}{2}\,\widehat{X}_{k-1}^*\,F_k^*\,(P_k^-)^{-1}\,x_k - \tfrac{1}{2}\,x_k^*\,(P_k^-)^{-1}\,F_k\,\widehat{X}_{k-1}$$
$$+ \tfrac{1}{2}\,\widehat{X}_{k-1}^*\,F_k^*\,(P_k^-)^{-1}\,F_k\,\widehat{X}_{k-1}$$
$$= \tfrac{1}{2}\,(x_k - \widehat{X}_k^-)^*\,(P_k^-)^{-1}\,(x_k - \widehat{X}_k^-)\;. \qquad \square$$

$\square$

(vi) En utilisant la relation de récurrence établie à la question (iii), montrer que

$$V_k(x_k) \;=\; \min_{x_{k-1}}\,\{V_{k-1}(x_{k-1}) + \tfrac{1}{2}\,(x_k - F_k\,x_{k-1})^*\,(Q_k^W)^{-1}\,(x_k - F_k\,x_{k-1})\}$$
$$+ \tfrac{1}{2}\,(Y_k - H_k\,x_k)^*\,(Q_k^V)^{-1}\,(Y_k - H_k\,x_k)$$
$$= \tfrac{1}{2}\,(x_k - \widehat{X}_k)^*\,P_k^{-1}\,(x_k - \widehat{X}_k)\;,$$

pour tout $x_k \in \mathbb{R}^m$, c'est–à–dire que l'hypothèse de récurrence $(\star)$ est vérifiée à l'instant k.

Solution

En utilisant l'expression obtenue à la question précédente, on obtient

$$
\begin{aligned}
V_k(x_k) &= \min_{x_{k-1}} \{V_{k-1}(x_{k-1}) + \tfrac{1}{2}\,(x_k - F_k\,x_{k-1})^*\,(Q^W_k)^{-1}\,(x_k - F_k\,x_{k-1})\} \\
&\qquad + \tfrac{1}{2}\,(Y_k - H_k\,x_k)^*\,(Q^V_k)^{-1}\,(Y_k - H_k\,x_k) \\
&= \tfrac{1}{2}\,(x_k - \widehat{X}^-_k)^*\,(P^-_k)^{-1}\,(x_k - \widehat{X}^-_k) \\
&\qquad + \tfrac{1}{2}\,(Y_k - H_k\,x_k)^*\,(Q^V_k)^{-1}\,(Y_k - H_k\,x_k) \\
&= \tfrac{1}{2}\,x^*_k\,((P^-_k)^{-1} + H^*_k\,(Q^V_k)^{-1}\,H_k)\,x_k \\
&\qquad - ((P^-_k)^{-1}\,\widehat{X}^-_k + H^*_k\,(Q^V_k)^{-1}\,Y_k)^*\,x_k \\
&\qquad + \tfrac{1}{2}\,((\widehat{X}^-_k)^*\,(P^-_k)^{-1}\,\widehat{X}^-_k + Y^*_k\,(Q^V_k)^{-1}\,Y_k) \\
&= \tfrac{1}{2}\,x^*_k\,A\,x_k - b^*\,x_k + \tfrac{1}{2}\,c \\
&= \tfrac{1}{2}\,(x_k - A^{-1}\,b)^*\,A\,(x_k - A^{-1}\,b) + \tfrac{1}{2}\,(c - b^*\,A^{-1}\,b)\ ,
\end{aligned}
$$

avec

$$
\begin{aligned}
A &= (P^-_k)^{-1} + H_k\,(Q^V_k)^{-1}\,H^*_k\ , \\
b &= (P^-_k)^{-1}\,\widehat{X}^-_k + H^*_k\,(Q^V_k)^{-1}\,Y_k\ , \\
c &= (\widehat{X}^-_k)^*\,(P^-_k)^{-1}\,\widehat{X}^-_k + Y^*_k\,(Q^V_k)^{-1}\,Y_k\ .
\end{aligned}
$$

Il suffit donc d'évaluer la matrice A^{-1} et le vecteur $A^{-1}\,b$.

On a d'abord, en utilisant d'après le lemme d'inversion matricielle

$$
\begin{aligned}
A^{-1} &= ((P^-_k)^{-1} + H_k\,(Q^V_k)^{-1}\,H^*_k)^{-1} \\
&= P^-_k - P^-_k\,H^*_k\,(H^*_k\,P^-_k\,H_k + Q^V_k)^{-1}\,H_k\,P^-_k \\
&= (I - K_k\,H_k)\,P^-_k = P_k\ ,
\end{aligned}
$$

et on en déduit que

$$
A^{-1}\,b = (I - K_k\,H_k)\ P^-_k\ \ ((P^-_k)^{-1}\,\widehat{X}^-_k + H^*_k\,(Q^V_k)^{-1}\,Y_k)\ .
$$

On vérifie que

$$
\begin{aligned}
&(I - K_k\,H_k)\ P^-_k\ H^*_k \\
&\quad = P^-_k\ H^*_k - P^-_k\ H^*_k\ (H_k\,P^-_k\ H^*_k + Q^V_k)^{-1}\ (H_k\,P^-_k\ H^*_k + Q^V_k - Q^V_k) \\
&\quad = P^-_k\ H^*_k - P^-_k\ H^*_k + K_k\,Q^V_k = K_k\,Q^V_k\ ,
\end{aligned}
$$

de sorte que

$$
A^{-1}\,b = (I - K_k\,H_k)\ \widehat{X}^-_k + K_k\,Y_k = \widehat{X}^-_k + K_k\ (Y_k - H_k\,\widehat{X}^-_k) = \widehat{X}_k\ ,
$$

c'est–à–dire que l'hypothèse de récurrence est vérifiée à l'instant k.

$\square$

(vii) Montrer que la relation de récurrence rétrograde établie à la question (iv) pour la suite $\{X_k^{\mathrm{MAP}}\}$ peut être reformulée comme

$$X_{k-1}^{\mathrm{MAP}} = \widehat{X}_{k-1} + L_k \, (X_k^{\mathrm{MAP}} - \widehat{X}_k^-) \ ,$$

avec la condition initiale $X_n^{\mathrm{MAP}} = \widehat{X}_n$.

Solution

On vérifie que

$$X_k^{\mathrm{MAP}} = I_{k-1}(X_{k-1}^{\mathrm{MAP}}) = \widehat{X}_{k-1} + L_k \, (X_k^{\mathrm{MAP}} - \widehat{X}_k^-) \ ,$$

et

$$X_n^{\mathrm{MAP}} = \operatorname*{argmin}_{x_n} V_n(x_n) = \widehat{X}_n \ . \qquad \square$$

$\square$