Université de Rennes 1
Master recherche STI

Examen du cours UE 14
“Filtre de Kalman et modèles de Markov cachés”
Jeudi 24 janvier 2008, 10:30 à 12:30
— Corrigé —

Problème

Le but de ce problème est d'établir les équations du lisseur de Kalman et de certaines moyennes conditionnelles à valeurs matricielles pour le système linéaire suivant :

$$X_k = F\, X_{k-1} + W_k \ ,$$

$$Y_k = H\, X_k + V_k \ ,$$

sous les hypothèses habituelles :

- *X_0 vecteur aléatoire gaussien, de moyenne $\bar{X}_0$ et de matrice de covariance Σ_0,*
- *$\{W_k\}$ bruit blanc gaussien centré de matrice de covariance Q,*
- *$\{V_k\}$ bruit blanc gaussien centré de matrice de covariance R inversible,*
- *X_0, $\{W_k\}$ et $\{V_k\}$ mutuellement indépendants.*

Soit n un instant final *fixé*, et soit $Y_{0:n} = (Y_0, \cdots, Y_n)$: on souhaite calculer les moyennes conditionnelles et les matrices de covariance

$$\widehat{W}_{k|n} = \mathbb{E}[W_k \mid Y_{0:n}] \qquad \text{et} \qquad Q_{k|n} = \mathbb{E}[(W_k - \widehat{W}_{k|n})\, (W_k - \widehat{W}_{k|n})^*] \ ,$$

pour tout instant $k = 1, \cdots, n$, et

$$\widehat{X}_{k|n} = \mathbb{E}[X_k \mid Y_{0:n}] \qquad \text{et} \qquad P_{k|n} = \mathbb{E}[(X_k - \widehat{X}_{k|n})\, (X_k - \widehat{X}_{k|n})^*] \ ,$$

pour tout instant $k = 0, 1, \cdots, n$, ainsi que les moyennes conditionnelles à valeurs matricielles :

$$\mathbb{E}[\sum_{k=0}^{n-1} X_k\, X_k^* \mid Y_{0:n}] \qquad \text{et} \qquad \mathbb{E}[\sum_{k=0}^{n-1} X_{k+1}\, X_k^* \mid Y_{0:n}] \ .$$

On introduit le processus d'innovation $\{I_k\}$ défini par l'une ou l'autre des expressions équivalentes suivantes

$$I_k = Y_k - \mathbb{E}[Y_k \mid Y_{0:k-1}] = Y_k - H\,\widehat{X}_k^- = H\,(X_k - \widehat{X}_k^-) + V_k \ ,$$

où

$$\widehat{X}_k^- = \mathbb{E}[X_k \mid Y_{0:k-1}] \ ,$$

par définition, pour tout $k = 0, 1, \cdots, n$, et on rappelle les propriétés suivantes

- la suite $\{I_k\}$ est un bruit blanc gaussien centré, c'est–à–dire une suite de vecteurs aléatoires gaussiens indépendants centrés,
- en particulier I_k est un vecteur aléatoire gaussien indépendant de $Y_{0:k-1}$, de moyenne nulle et de matrice de covariance inversible

  $$\Xi_k = H\,P_k^-\,H^* + R \qquad \text{où} \qquad P_k^- = \mathbb{E}[(X_k - \widehat{X}_k^-)\,(X_k - \widehat{X}_k^-)^*] \ ,$$

  pour tout $k = 0, 1, \cdots, n$,
- toute fonction des variables $(Y_0, \cdots, Y_{k-1}, Y_k)$ peut s'exprimer en fonction des variables $(Y_0, \cdots, Y_{k-1}, I_k)$, et réciproquement, de sorte que $(Y_{0:k-1}, I_k)$ contient exactement la même information que $Y_{0:k}$, et par récurrence $I_{0:k}$ contient exactement la même information que $Y_{0:k}$,

vues en cours. On définit aussi

$$\widehat{X}_k = \mathbb{E}[X_k \mid Y_{0:k}] \qquad \text{et} \qquad P_k = \mathbb{E}[(X_k - \widehat{X}_k)\,(X_k - \widehat{X}_k)^*] \ ,$$

pour tout $k = 0, \cdots, n$.

(i) **Montrer que si le vecteur aléatoire $(Z, Y_{0:n})$ est gaussien, alors la moyenne conditionnelle $\mathbb{E}[Z \mid Y_{0:n}]$ se décompose comme**

$$\mathbb{E}[Z \mid Y_{0:n}] = \mathbb{E}[Z] + \sum_{p=0}^{n} \mathbb{E}[Z\,I_p^*]\,\Xi_p^{-1}\,I_p \ ,$$

sur une base de vecteurs aléatoires gaussiens indépendants centrés.

Solution

Le vecteur aléatoire $(Z, I_{0:n})$ est gaussien, comme transformation affine du vecteur aléatoire gaussien $(Z, Y_{0:n})$, et la moyenne conditionnelle de la composante Z du vecteur aléatoire gaussien $(Z, I_{0:n})$, sachant l'autre composante $I_{0:n}$ du même vecteur aléatoire gaussien, dépend linéairement de $I_{0:n}$, de sorte que

$$\mathbb{E}[Z \mid Y_{0:n}] = \mathbb{E}[Z \mid I_{0:n}] = c_0 + \sum_{p=1}^{n} c_p\,I_p \ ,$$

et il reste seulement à déterminer les coefficients $c_0, c_1, \cdots, c_n$. On vérifie que

$$\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[\,\mathbb{E}[Z \mid I_{0:n}]\,] = c_0 + \sum_{q=1}^{n} c_q \, \mathbb{E}[I_q] = c_0 \ ,$$

de sorte que

$$c_0 = \mathbb{E}[Z] \ ,$$

et d'autre part

$$\mathbb{E}[Z \ I_p^*] = \mathbb{E}[\,\mathbb{E}[Z \mid I_{0:n}] \ I_p^*] = c_0 \, \mathbb{E}[I_p^*] + \sum_{q=1}^{n} c_q \, \mathbb{E}[I_q \ I_p^*] = c_p \, \Xi_p \ ,$$

de sorte que

$$c_p = \mathbb{E}[Z \ I_p^*] \, \Xi_p^{-1} \ ,$$

pour tout $p = 1, \cdots, n$.

(ii) **En déduire que les moyennes conditionnelles $\widehat{W}_{k|n}$ et $\widehat{X}_{0|n}$ se décomposent comme**

$$\widehat{W}_{k|n} = \mathbb{E}[W_k \mid Y_{0:n}] = \sum_{p=k}^{n} \mathbb{E}[W_k \, I_p^*] \, \Xi_p^{-1} \ I_p \ ,$$

et

$$\widehat{X}_{0|n} = \mathbb{E}[X_0 \mid Y_{0:n}] = \bar{X}_0 + \sum_{p=0}^{n} \mathbb{E}[X_0 \, I_p^*] \, \Xi_p^{-1} \ I_p \ ,$$

sur une base de vecteurs aléatoires gaussiens indépendants centrés.

Solution

Le vecteur aléatoire $(W_k, Y_{0:n})$ est gaussien, et d'après la réponse à la question (i)

$$\widehat{W}_{k|n} = \mathbb{E}[W_k \mid Y_{0:n}] = \mathbb{E}[W_k] + \sum_{p=0}^{n} \mathbb{E}[W_k \, I_p^*] \, \Xi_p^{-1} \ I_p = \sum_{p=k}^{n} \mathbb{E}[W_k \, I_p^*] \, \Xi_p^{-1} \ I_p \ ,$$

compte tenu que les vecteurs aléatoires W_k et I_p sont indépendants, pour tout $p = 0, 1, \cdots, (k-1)$. De même, le vecteur aléatoire $(X_k, Y_{0:n})$ est gaussien, et d'après la réponse à la question (i)

$$\widehat{X}_{k|n} = \mathbb{E}[X_k \mid Y_{0:n}] = \mathbb{E}[X_k] + \sum_{p=0}^{n} \mathbb{E}[X_k \, I_p^*] \, \Xi_p^{-1} \ I_p \ .$$

La suite du problème consiste à trouver un système d'équations récurrentes pour calculer les moyennes à valeurs matricielles

$$\mathbb{E}[W_k\, I_p^*] \qquad \text{et} \qquad \mathbb{E}[X_k\, I_p^*] \ ,$$

pour tout instant $p = k, \cdots, n$.

(iii) **Montrer que**

$$\mathbb{E}[W_k\, I_p^*] = \mathbb{E}[W_k\, (X_p - \widehat{X}_p^-)^*]\ H^* \qquad \textbf{et} \qquad \mathbb{E}[X_k\, I_p^*] = \mathbb{E}[X_k\, (X_p - \widehat{X}_p^-)^*]\ H^* \ ,$$

pour tout $p = k, \cdots, n$**.**

Solution

En utilisant la décomposition

$$I_p = H\,(X_p - \widehat{X}_p^-) + V_p \ ,$$

on obtient

$$\mathbb{E}[W_k\, I_p^*] = \mathbb{E}[W_k\, (X_p - \widehat{X}_p^-)^*]\ H^* + \mathbb{E}[W_k\, V_p^*] = \mathbb{E}[W_k\, (X_p - \widehat{X}_p^-)^*]\ H^* \ ,$$

compte tenu que les vecteurs aléatoires W_k et V_p sont indépendants, et de même

$$\mathbb{E}[X_k\, I_p^*] = \mathbb{E}[X_k\, (X_p - \widehat{X}_p^-)^*]\ H^* + \mathbb{E}[X_k\, V_p^*] = \mathbb{E}[X_k\, (X_p - \widehat{X}_p^-)^*]\ H^* \ ,$$

compte tenu que les vecteurs aléatoires X_k et V_p sont indépendants.

□

(iv) **En utilisant le modèle d'état et les équations du filtre de Kalman, exprimer** $(X_p - \widehat{X}_p^-)$ **en fonction de** $(X_{p-1} - \widehat{X}_{p-1}^-)$**,** W_p **et** V_{p-1}**.**

Solution

On rappelle que

$$\widehat{X}_{p-1} = \widehat{X}_{p-1}^- + K_{p-1}\, I_{p-1} = \widehat{X}_{p-1}^- + K_{p-1}\, (H\,(X_{p-1} - \widehat{X}_{p-1}^-) + V_{p-1}) \ ,$$

et par différence on obtient

$$\begin{aligned} X_p - \widehat{X}_p^- &= (F\, X_{p-1} + W_p) - F\, \widehat{X}_{p-1} \\ &= (F\, X_{p-1} + W_p) - F\, (\widehat{X}_{p-1}^- + K_{p-1}\, (H\,(X_{p-1} - \widehat{X}_{p-1}^-) + V_{p-1})) \\ &= F\,(I - K_{p-1}\, H)\, (X_{p-1} - \widehat{X}_{p-1}^-) + W_p - F\, K_{p-1}\, V_{p-1} \ . \end{aligned}$$

$\square$

On pose
$$\Lambda_k = F\,(I - K_k\,H) \qquad \text{où} \qquad K_k = P_k^-\,H^*\,\Xi_k^{-1}\ ,$$
représente le gain de Kalman, et
$$\Delta_{k,p} = \Lambda_k^* \cdots \Lambda_{p-1}^*\ ,$$
pour tout $p = k, \cdots, n$, avec la convention $\Delta_{k,k} = I$.

(v) **Montrer que**
$$\mathbb{E}[W_k\,(X_k - \widehat{X}_k^-)^*] = Q\ ,$$
pour $p = k$, et en utilisant la réponse à la question (iv) montrer que
$$\mathbb{E}[W_k\,(X_p - \widehat{X}_p^-)^*] = \mathbb{E}[W_k\,(X_{p-1} - \widehat{X}_{p-1}^-)^*]\ \Lambda_{p-1}^*\ ,$$
pour tout $p = k+1, \cdots, n$. En déduire par récurrence que
$$\mathbb{E}[W_k\,(X_p - \widehat{X}_p^-)^*] = Q\ \Delta_{k,p}\ ,$$
pour tout $p = k, \cdots, n$.

Solution

On a directement
$$\mathbb{E}[W_k\,(X_k - \widehat{X}_k^-)^*] = \mathbb{E}[W_k\,X_k^*] - \mathbb{E}[W_k\,(\widehat{X}_k^-)^*] = \mathbb{E}[W_k\,X_k^*]\ ,$$
compte tenu que les vecteurs aléatoires $\widehat{X}_k^-$ et W_k sont indépendants, et d'autre part en utilisant le modèle d'état
$$\mathbb{E}[W_k\,X_k^*] = \mathbb{E}[W_k\,(F\,X_{k-1} + W_k)^*] = \mathbb{E}[W_k\,W_k^*] = Q\ ,$$
compte tenu que les vecteurs aléatoires X_{k-1} et W_k sont indépendants.

D'après la réponse à la question (iv)
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[W_k\,(X_p - \widehat{X}_p^-)^*] &= \mathbb{E}[W_k\,(F\,(I - K_{p-1}\,H)\,(X_{p-1} - \widehat{X}_{p-1}^-) + W_p - F\,K_{p-1}\,V_{p-1})^*] \\
&= \mathbb{E}[W_k\,(X_{p-1} - \widehat{X}_{p-1}^-)^*]\ (F\,(I - K_{p-1}\,H))^* \\
&\qquad + \mathbb{E}[W_k\,W_p^*] - \mathbb{E}[W_k\,V_{p-1})^*]\ (F\,K_{p-1})^* \\
&= \mathbb{E}[W_k\,(X_{p-1} - \widehat{X}_{p-1}^-)^*]\ \Lambda_{p-1}^*\ ,
\end{aligned}$$

compte tenu que les vecteurs aléatoires W_k et W_p sont indépendants pour tout $p = k+1, \cdots, n$, et compte tenu que les vecteurs aléatoires W_k et V_{p-1} sont indépendants.

L'hypothèse de récurrence est vérifiée pour $p = k$. Si l'hypothèse de récurrence est vérifiée au rang $(p-1)$, alors d'après ce qui précède

$$\mathbb{E}[W_k\,(X_p - \widehat{X}_p^-)^*] = \mathbb{E}[W_k\,(X_{p-1} - \widehat{X}_{p-1}^-)^*]\ \Lambda_{p-1}^* = Q\ \Delta_{k,p-1}\ \Lambda_{p-1}^* = Q\ \Delta_{k,p}\ ,$$

et l'hypothèse de récurrence est vérifiée au rang p.

□

(vi) **Montrer que**

$$\mathbb{E}[X_k\,(X_k - \widehat{X}_k^-)^*] = P_k^-\ ,$$

pour $p = k$, et en utilisant la réponse à la question (iv) montrer que

$$\mathbb{E}[X_k\,(X_p - \widehat{X}_p^-)^*] = \mathbb{E}[X_k\,(X_{p-1} - \widehat{X}_{p-1}^-)^*]\ \Lambda_{p-1}^*\ ,$$

pour tout $p = k+1, \cdots, n$. En déduire par récurrence que

$$\mathbb{E}[X_k\,(X_p - \widehat{X}_p^-)^*] = P_k^-\ \Delta_{k,p}\ ,$$

pour tout $p = k, \cdots, n$.

Solution

On a directement

$$P_k^- = \mathbb{E}[(X_k - \widehat{X}_k^-)\,(X_k - \widehat{X}_k^-)^*] = \mathbb{E}[X_k\,(X_k - \widehat{X}_k^-)^*]\ .$$

D'après la réponse à la question (iv)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_k\,(X_p - \widehat{X}_p^-)^*] &= \mathbb{E}[X_k\,(F\,(I - K_{p-1}\,H)\ (X_{p-1} - \widehat{X}_{p-1}^-) + W_p - F\,K_{p-1}\,V_{p-1})^*] \\
&= \mathbb{E}[X_k\,(X_{p-1} - \widehat{X}_{p-1}^-)^*]\ (F\,(I - K_{p-1}\,H))^* \\
&\qquad + \mathbb{E}[X_k\,W_p^*] - \mathbb{E}[X_k\,V_{p-1})^*]\ (F\,K_{p-1})^* \\
&= \mathbb{E}[X_k\,(X_{p-1} - \widehat{X}_{p-1}^-)^*]\ \Lambda_{p-1}^*\ ,
\end{aligned}$$

compte tenu que les vecteurs aléatoires X_k et W_p sont indépendants pour tout $p = k+1, \cdots, n$, et compte tenu que les vecteurs aléatoires X_k et V_{p-1} sont indépendants.

L'hypothèse de récurrence est vérifiée pour $p = k$. Si l'hypothèse de récurrence est vérifiée au rang $(p-1)$, alors d'après ce qui précède

$$\mathbb{E}[X_k\,(X_p - \widehat{X}_p^-)^*] = \mathbb{E}[X_k\,(X_{p-1} - \widehat{X}_{p-1}^-)^*]\ \Lambda_{p-1}^* = P_k^-\ \Delta_{k,p-1}\ \Lambda_{p-1}^* = P_k^-\ \Delta_{k,p}\ ,$$

et l'hypothèse de récurrence est vérifiée au rang p.

$\square$

On définit

$$U_k = \sum_{p=k}^{n} \Delta_{k,p}\ H^*\ \Xi_p^{-1}\ I_p \qquad \text{et} \qquad C_k = \sum_{p=k}^{n} \Delta_{k,p}\ H^*\ \Xi_p^{-1}\ H\ \Delta_{k,p}^*\ ,$$

pour tout $k = 0, 1, \cdots, n$.

(vii) **Montrer que**

$$U_n = H^*\ \Xi_n^{-1}\ I_n \qquad \textbf{et} \qquad C_n = H^*\ \Xi_n^{-1}\ H\ ,$$

pour $k = n$**, et montrer les relations de récurrence rétrogrades**

$$U_k = H^*\ \Xi_k^{-1}\ I_k + \Lambda_k^*\ U_{k+1} \qquad \textbf{et} \qquad C_k = H^*\ \Xi_k^{-1}\ H + \Lambda_k^*\ C_{k+1}\ \Lambda_k\ ,$$

pour tout $k = 0, 1, \cdots, n-1$**.**

Solution

Par définition

$$U_n = \Delta_{n,n}\ H^*\ \Xi_n^{-1}\ I_n = H^*\ \Xi_n^{-1}\ I_n\ ,$$

et

$$C_n = \Delta_{n,n}\ H^*\ \Xi_n^{-1}\ H\ \Delta_{n,n}^* = H^*\ \Xi_n^{-1}\ H\ ,$$

pour $k = n$, compte tenu de la convention $\Delta_{n,n} = I$.

D'autre part, on remarque que

$$\begin{aligned} U_k &= \sum_{p=k}^{n} \Delta_{k,p}\ H^*\ \Xi_p^{-1}\ I_p \\ &= \Delta_{k,k}\ H^*\ \Xi_k^{-1}\ I_k + \sum_{p=k+1}^{n} \Delta_{k,p}\ H^*\ \Xi_p^{-1}\ I_p \\ &= H^*\ \Xi_k^{-1}\ I_k + \Lambda_k^* \sum_{p=k+1}^{n} \Delta_{k+1,p}\ H^*\ \Xi_p^{-1}\ I_p \\ &= H^*\ \Xi_k^{-1}\ I_k + \Lambda_k^*\ U_{k+1}\ , \end{aligned}$$

compte tenu de la convention $\Delta_{k,k} = I$ et de la relation $\Delta_{k,p} = \Lambda_k^* \; \Delta_{k+1,p}$ valable pour tout $p = k+1, \cdots, n$, et en procédant de la même manière

$$\begin{aligned}
C_k &= \sum_{p=k}^{n} \Delta_{k,p} \; H^* \; \Xi_p^{-1} \; H \; \Delta_{k,p}^* \\
&= \Delta_{k,k} \; H^* \; \Xi_k^{-1} \; H \; \Delta_{k,k}^* + \sum_{p=k+1}^{n} \Delta_{k,p} \; H^* \; \Xi_p^{-1} \; H \; \Delta_{k,p}^* \\
&= H^* \; \Xi_k^{-1} \; I_k + \Lambda_k^* \sum_{p=k+1}^{n} \Delta_{k+1,p} \; H^* \; \Xi_p^{-1} \; H \; \Delta_{k+1,p}^* \; \Lambda_k \\
&= H^* \; \Xi_k^{-1} \; I_k + \Lambda_k^* \; C_{k+1} \; \Lambda_k \; ,
\end{aligned}$$

pour tout $k = 0, 1, \cdots, n-1$.

□

(viii) **Déduire des réponses aux questions (ii), (iii) et (v) que**

$$\widehat{W}_{k|n} = \mathbb{E}[W_k \mid Y_{0:n}] = Q \sum_{p=k}^{n} \Delta_{k,p} \; H^* \; \Xi_p^{-1} \; I_p = Q \; U_k \; ,$$

et

$$Q_{k|n} = \mathbb{E}[(W_k - \widehat{W}_{k|n}) \; (W_k - \widehat{W}_{k|n})^*] = Q - Q \; C_k \; Q \; ,$$

pour tout $k = 1, \cdots, n$**.**

Solution

En utilisant les réponses aux questions (ii), (iii) et (v)

$$\begin{aligned}
\widehat{W}_{k|n} = \sum_{p=k}^{n} \mathbb{E}[W_k \; I_p^*] \; \Xi_p^{-1} \; I_p &= \sum_{p=k}^{n} \mathbb{E}[W_k \, (X_p - \widehat{X}_p^-)^*] \; H^* \; \Xi_p^{-1} \; I_p \\
&= Q \sum_{p=k}^{n} \Delta_{k,p} \; H^* \; \Xi_p^{-1} \; I_p = Q \; U_k \; ,
\end{aligned}$$

et on en déduit que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\widehat{W}_{k|n} \; \widehat{W}_{k|n}^*] &= Q \sum_{p,q=k}^{n} \Delta_{k,p} \; H^* \; \Xi_p^{-1} \; \mathbb{E}[I_p \; I_q^*] \; \Xi_q^{-1} \; H \; \Delta_{k,q}^* \; Q \\
&= Q \sum_{p=k}^{n} \Delta_{k,p} \; H^* \; \Xi_p^{-1} \; H \; \Delta_{k,p}^* \; Q = Q \; C_k \; Q \; ,
\end{aligned}$$

de sorte que

$$Q_{k|n} = \mathbb{E}[(W_k - \widehat{W}_{k|n})\ (W_k - \widehat{W}_{k|n})^*] = \mathbb{E}[W_k\ W_k^*] - \mathbb{E}[\widehat{W}_{k|n}\ \widehat{W}_{k|n}^*] = Q - Q\ C_k\ Q\ .$$

$\square$

(ix) **Montrer que**

$$\mathbb{E}[(W_{k+1} - \widehat{W}_{k+1|n})\ (X_k - \widehat{X}_{k|n})^*] = -\mathbb{E}[\widehat{W}_{k+1|n}\ X_k^*]\ ,$$

et déduire des réponses aux questions (iii), (vi) et (viii) que

$$\mathbb{E}[\widehat{W}_{k+1|n}\ X_k^*] = Q\ C_{k+1}\ \Lambda_k\ P_k^- = Q\ C_{k+1}\ F\ P_k\ ,$$

pour tout $k = 0, \cdots, n-1$**.**

Solution

On remarque que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(W_k - \widehat{W}_{k|n})\ (X_{k-1} - \widehat{X}_{k-1|n})^*] &= \mathbb{E}[(W_k - \widehat{W}_{k|n})\ X_{k-1}^*] - \mathbb{E}[(W_k - \widehat{W}_{k|n})\ \widehat{X}_{k-1|n}^*] \\
&= \mathbb{E}[W_k\ X_{k-1}^*] - \mathbb{E}[\widehat{W}_{k|n}\ X_{k-1}^*] \\
&= -\mathbb{E}[\widehat{W}_{k|n}\ X_{k-1}^*]\ ,
\end{aligned}$$

compte tenu que les vecteurs aléatoires W_k et X_{k-1} sont indépendants. En utilisant les réponses aux questions (iii), (vi) et (viii)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\widehat{W}_{k+1|n}\ X_k^*] &= Q \sum_{p=k+1}^{n} \Delta_{k+1,p}\ H^*\ \Xi_p^{-1}\ \mathbb{E}[I_p\ X_k^*] \\
&= Q \sum_{p=k+1}^{n} \Delta_{k+1,p}\ H^*\ \Xi_p^{-1}\ H\ \mathbb{E}[(X_p - \widehat{X}_p^-)\ X_k^*] \\
&= Q \sum_{p=k+1}^{n} \Delta_{k+1,p}\ H^*\ \Xi_p^{-1}\ H\ \Delta_{k,p}^*\ P_k^- \\
&= Q \sum_{p=k+1}^{n} \Delta_{k+1,p}\ H^*\ \Xi_p^{-1}\ H\ \Delta_{k+1,p}^*\ \Lambda_k\ P_k^- \\
&= Q\ C_{k+1}\ \Lambda_k\ P_k^-\ ,
\end{aligned}$$

et on remarque que

$$\Lambda_k\ P_k^- = F\ (I - K_k\ H)\ P_k^- = F\ P_k\ .$$

$\square$

(x) **Déduire des réponses aux questions (ii), (iii) et (vi) que**

$$\widehat{X}_{0|n} = \mathbb{E}[X_0 \mid Y_{0:n}] = \bar{X}_0 + \Sigma_0 \, U_0 \ ,$$

et

$$P_{0|n} = \mathbb{E}[(X_0 - \widehat{X}_{0|n}) \, (X_0 - \widehat{X}_{0|n})^*] = \Sigma_0 - \Sigma_0 \, C_0 \, \Sigma_0 \ .$$

Solution

En utilisant les réponses aux questions (ii), (iii) et (vi)

$$\begin{aligned}\widehat{X}_{0|n} = \bar{X}_0 + \sum_{p=0}^{n} \mathbb{E}[X_0 \, I_p^*] \, \Xi_p^{-1} \, I_p \ &= \ \bar{X}_0 + \sum_{p=0}^{n} \mathbb{E}[X_0 \, (X_p - \widehat{X}_p^-)^*] \, H^* \, \Xi_p^{-1} \, I_p \\ &= \ \bar{X}_0 + \Sigma_0 \ \sum_{p=0}^{n} \Delta_{0,p} \, H^* \, \Xi_p^{-1} \, I_p = \bar{X}_0 + \Sigma_0 \, U_0 \ ,\end{aligned}$$

et on en déduit que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(\widehat{X}_{0|n} - \bar{X}_0) \, (\widehat{X}_{0|n} - \bar{X}_0)^*] \ &= \ \Sigma_0 \ \sum_{p,q=0}^{n} \Delta_{0,p} \, H^* \, \Xi_p^{-1} \, \mathbb{E}[I_p \, I_q^*] \, \Xi_q^{-1} \, H \, \Delta_{0,q}^* \, \Sigma_0 \\ &= \ \Sigma_0 \ \sum_{p=0}^{n} \Delta_{0,p} \, H^* \, \Xi_p^{-1} \, H \, \Delta_{0,p}^* \, \Sigma_0 = \Sigma_0 \, C_0 \, \Sigma_0 \ ,\end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned}P_{0|n} \ &= \ \mathbb{E}[(X_0 - \widehat{X}_{0|n}) \, (X_0 - \widehat{X}_{0|n})^*] \\ &= \ \mathbb{E}[(X_0 - \bar{X}_0 - (\widehat{X}_{0|n} - \bar{X}_0)) \, (X_0 - \bar{X}_0 - (\widehat{X}_{0|n} - \bar{X}_0))^*] \\ &= \ \mathbb{E}[(X_0 - \bar{X}_0) \, (X_0 - \bar{X}_0)^*] - \mathbb{E}[(\widehat{X}_{0|n} - \bar{X}_0) \, (\widehat{X}_{0|n} - \bar{X}_0)^*] = \Sigma_0 - \Sigma_0 \, C_0 \, \Sigma_0 \ .\end{aligned}$$

□

(xi) **Montrer que la suite $\{\widehat{X}_{k|n}\}$ vérifie la relation de récurrence**

$$\widehat{X}_{k|n} = F \, \widehat{X}_{k-1|n} + Q \, U_k \ ,$$

pour tout $k = 1, \cdots, n$, avec la condition initiale

$$\widehat{X}_{0|n} = \bar{X}_0 + \Sigma_0 \, U_0 \ ,$$

obtenue en réponse à la question (x).

Solution

En utilisant la définition et l'équation d'état, et la réponse à la question (viii), il vient

$$\begin{aligned}\widehat{X}_{k|n} = \mathbb{E}[X_k \mid Y_{0:n}] &= F\ \mathbb{E}[X_{k-1} \mid Y_{0:n}] + \mathbb{E}[W_k \mid Y_{0:n}] \\ &= F\ \widehat{X}_{k-1|n} + \widehat{W}_{k|n} \\ &= F\ \widehat{X}_{k-1|n} + Q\ U_k\ ,\end{aligned}$$

pour tout $k = 1, \cdots, n$, avec la condition initiale

$$\widehat{X}_{0|n} = \bar{X}_0 + \Sigma_0\ U_0\ ,$$

obtenue en réponse à la question (x).

□

(xii) **En déduire que la suite $\{P_{k|n}\}$ vérifie la relation de récurrence**

$$P_{k|n} = F\ P_{k-1|n}\ F^* + Q + Q\ C_k\ Q - Q\ C_k\ P_k^- - P_k^-\ C_k\ Q\ ,$$

pour tout $k = 1, \cdots, n$, avec la condition initiale

$$P_{0|n} = \Sigma_0 - \Sigma_0\ C_0\ \Sigma_0\ ,$$

obtenue en réponse à la question (x).

Solution

Par différence

$$X_k - \widehat{X}_{k|n} = F\ (X_{k-1} - \widehat{X}_{k-1|n}) + (W_k - \widehat{W}_{k|n})\ ,$$

et en utilisant les réponses aux questions (viii) et (ix), il vient

$$\begin{aligned}P_{k|n} &= \mathbb{E}[(X_k - \widehat{X}_{k|n})\ (X_k - \widehat{X}_{k|n})^*] \\ &= F\ \mathbb{E}[(X_{k-1} - \widehat{X}_{k-1|n})\ (X_{k-1} - \widehat{X}_{k-1|n}))^*]\ F^* + \mathbb{E}[(W_k - \widehat{W}_{k|n})\ (W_k - \widehat{W}_{k|n})^*] \\ &\qquad + \mathbb{E}[(W_k - \widehat{W}_{k|n})\ (X_{k-1} - \widehat{X}_{k-1|n})^*]\ F^* \\ &\qquad + F\ \mathbb{E}[(X_{k-1} - \widehat{X}_{k-1|n})\ (W_k - \widehat{W}_{k|n})^*] \\ &= F\, P_{k-1|n}\, F^* + Q - Q\, C_k\, Q - Q\, C_k\, F\, P_{k-1}\, F^* - F\, P_{k-1}\, F^*\, C_k\, Q \\ &= F\, P_{k-1|n}\, F^* + Q + Q\, C_k\, Q - Q\, C_k\, (F\, P_{k-1}\, F^* + Q) - (F\, P_{k-1}\, F^* + Q)\, C_k\, Q \\ &= F\, P_{k-1|n}\, F^* + Q + Q\, C_k\, Q - Q\, C_k\, P_k^- - P_k^-\, C_k\, Q\ ,\end{aligned}$$

pour tout $k = 1, \cdots, n$, avec la condition initiale

$$P_{0|n} = \Sigma_0 - \Sigma_0 \, C_0 \, \Sigma_0 \ ,$$

obtenue en réponse à la question (x).

(xiii) **Montrer que**

$$\mathbb{E}[\sum_{k=0}^{n-1} X_k \, X_k^* \mid Y_{0:n}] = \sum_{k=0}^{n-1} [P_{k|n} + \widehat{X}_{k|n} \ \widehat{X}_{k|n}^*] \ ,$$

et

$$\mathbb{E}[\sum_{k=0}^{n-1} X_{k+1} \, X_k^* \mid Y_{0:n}] = \sum_{k=0}^{n-1} [F \ P_{k|n} + Q \ C_{k+1} \ F \ P_k + \widehat{X}_{k+1|n} \ \widehat{X}_{k|n}^*] \ .$$

Solution

On remarque que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(X_k - \widehat{X}_{k|n}) \, (X_k - \widehat{X}_{k|n})^*] \ &= \ \mathbb{E}[(X_k - \widehat{X}_{k|n}) \, (X_k - \widehat{X}_{k|n})^* \mid Y_{0:n}] \\ &= \ \mathbb{E}[X_k \, X_k^* \mid Y_{0:n}] - \widehat{X}_{k|n} \, \widehat{X}_{k|n}^* \ , \end{aligned}$$

pour tout $k = 0, \cdots, n-1$, de sorte que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\sum_{k=0}^{n-1} X_k \, X_k^* \mid Y_{0:n}] \ &= \ \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}[X_k \, X_k^* \mid Y_{0:n}] \\ &= \ \sum_{k=0}^{n-1} [P_{k|n} + \widehat{X}_{k|n} \, \widehat{X}_{k|n}^*] \ . \end{aligned}$$

Par différence

$$X_{k+1} - \widehat{X}_{k+1|n} = F \ (X_k - \widehat{X}_{k|n}) + (W_{k+1} - \widehat{W}_{k+1|n}) \ ,$$

et en utilisant la réponse à la question (ix), il vient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(X_{k+1} - \widehat{X}_{k+1|n}) \, (X_k - \widehat{X}_{k|n})^*] \ &= \ F \ \mathbb{E}[(X_k - \widehat{X}_{k|n}) \, (X_k - \widehat{X}_{k|n}))^*] \ F^* \\ &\quad + \mathbb{E}[(W_{k+1} - \widehat{W}_{k+1|n}) \, (X_k - \widehat{X}_{k|n})^*] \\ &= \ F \, P_{k|n} \, F^* - Q \, C_{k+1} \, F \, P_k \ , \end{aligned}$$

et on remarque que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(X_{k+1} - \widehat{X}_{k+1|n})\,(X_k - \widehat{X}_{k|n})^*] &= \mathbb{E}[(X_{k+1} - \widehat{X}_{k+1|n})\,(X_k - \widehat{X}_{k|n})^* \mid Y_{0:n}] \\
&= \mathbb{E}[X_{k+1}\,X_k^* \mid Y_{0:n}] - \widehat{X}_{k+1|n}\,\widehat{X}^*_{k|n}\ ,
\end{aligned}$$

pour tout $k = 0, \cdots, n-1$, de sorte que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\sum_{k=0}^{n-1} X_{k+1}\,X_k^* \mid Y_{0:n}] &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}[X_{k+1}\,X_k^* \mid Y_{0:n}] \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} [F\,P_{k|n} - Q\,C_{k+1}\,F\,P_k + \widehat{X}_{k+1|n}\,\widehat{X}^*_{k|n}]\ .
\end{aligned}$$

$\square$