Université de Rennes 1
Master recherche STI
Examen du cours UE 14
“Filtre de Kalman et modèles de Markov cachés”
Jeudi 27 janvier 2005, 14:00 à 16:00

Problème :

L’objectif de ce problème est de retrouver les équations du filtre de Kalman, en appliquant les équations du filtre bayésien optimal dans le cas particulier des systèmes linéaires gaussiens.

On considère le système dynamique suivant

$$X_k = F_k X_{k-1} + G_k W_k \ ,$$

$$Y_k = H_k X_k + V_k \ ,$$

où $\{X_k\}$, $\{Y_k\}$, $\{W_k\}$ et $\{V_k\}$ prennent respectivement leurs valeurs dans $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^d$, $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^d$. On fait les hypothèses suivantes sur les coefficients : $F_k \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $G_k \in \mathbb{R}^{m \times p}$, $H_k \in \mathbb{R}^{d \times m}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$. On suppose que

- le bruit $\{W_k\}$ est un bruit blanc gaussien centré, de matrice de covariance Q_k^W *pas nécessairement inversible*,
- la condition initiale X_0 est gaussienne, de moyenne $\bar{X}_0$ et de matrice de covariance Q_0^X *pas nécessairement inversible*,
- le bruit d’observation $\{V_k\}$ est un bruit blanc gaussien centré, de matrice de covariance Q_k^V *inversible*,
- les bruits $\{W_k\}$ et $\{V_k\}$, et la condition initiale X_0, sont mutuellement indépendants.

Il s’agit de calculer la loi conditionnelle de la variable aléatoire X_k sachant $Y_{0:k}$, et la loi conditionnelle de la variable aléatoire X_k sachant $Y_{0:k-1}$, définies par

$$\mu_k(dx) = \mathbb{P}[X_k \in dx \mid Y_{0:k}] \qquad \text{et} \qquad \mu_k^-(dx) = \mathbb{P}[X_k \in dx \mid Y_{0:k-1}] \ ,$$

respectivement, et on se propose de procéder par récurrence.

On rappelle (voir l'annexe *Rappels de probabilités* dans le cours) que la fonction caractéristique d'une distribution de probabilité $\mu(dx)$ sur $\mathbb{R}^m$ est définie pour tout $u \in \mathbb{R}^m$ par

$$\Phi_\mu(u) = \int_{\mathbb{R}^m} \exp\{i\, u^*\, x\}\, \mu(dx)\ ,$$

et que la distribution $\mu(dx)$ est gaussienne, de moyenne χ et de matrice de covariance (pas nécessairement inversible) Σ, *si et seulement si* sa fonction caractéristique s'écrit

$$\Phi_\mu(u) = \exp\{i\, u^*\, \chi - \tfrac{1}{2}\, u^*\, \Sigma\, u\}\ ,$$

pour tout $u \in \mathbb{R}^m$. Enfin, si la matrice de covariance Ξ est inversible, on admettra la formule suivante (qui sera utilisée seulement à la question (x) ci–dessous) : pour tout $v \in \mathbb{R}^d$ et tout $z \in \mathbb{C}^d$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \exp\{i\, v^*\, y'\}\ \exp\{-\tfrac{1}{2}\, (y'-z)^*\, \Xi^{-1}\, (y'-z)\}\ \frac{dy'}{\sqrt{\det(2\,\pi\,\Xi)}} = \exp\{i\, v^*\, z - \tfrac{1}{2}\, v^*\, \Xi\, v\}\ .$$

(i) **Donner l'expression de la fonction caractéristique $\Phi_{\mu_0^-}(u)$ de la loi conditionnelle $\mu_0^-(dx)$, c'est–à–dire de la loi du vecteur aléatoire X_0.**

Solution

D'après l'énoncé, la loi $\mu_0^-(dx)$ est gaussienne, de moyenne $\bar{X}_0$ et de matrice de covariance Q_0^X, et sa fonction caractéristique est donc donnée par

$$\Phi_{\mu_0^-}(u) = \exp\{i\, u^*\, \bar{X}_0 - \tfrac{1}{2}\, u^*\, Q_0^X\, u\}\ ,$$

pour tout $u \in \mathbb{R}^m$.

□

(ii) **On suppose que la loi conditionnelle $\mu_{k-1}(dx)$ est gaussienne, de moyenne $\widehat{X}_{k-1}$ et de matrice de covariance P_{k-1} pas nécessairement inversible. Donner l'expression de la fonction caractéristique $\Phi_{\mu_{k-1}}(u)$ de la loi conditionnelle $\mu_{k-1}(dx)$.**

Solution

Par définition

$$\Phi_{\mu_{k-1}}(u) = \exp\{i\, u^*\, \widehat{X}_{k-1} - \tfrac{1}{2}\, u^*\, P_{k-1}\, u\}\ ,$$

pour tout $u \in \mathbb{R}^m$.

□

(iii) **Dans le cas particulier du système linéaire gaussien considéré, décrire la loi conditionnelle $Q_k(x, dx')$ du vecteur aléatoire X_k sachant $X_{k-1} = x$. En déduire l'expression de la fonction caractéristique**

$$\Phi_k(x, u) = \int_{\mathbb{R}^m} \exp\{i\, u^*\, x'\}\, Q_k(x, dx') \ ,$$

paramétrée par $x \in \mathbb{R}^m$, du noyau markovien $Q_k(x, dx')$.

Solution

Dans le cas particulier où

$$X_k = F_k\, X_{k-1} + G_k\, W_k \ ,$$

et avec les hypothèses faites, la loi conditionnelle $Q_k(x, dx')$ du vecteur aléatoire X_k sachant $X_{k-1} = x$ est une loi gaussienne, de moyenne $F_k\, x$ et de matrice de covariance $G_k\, Q_k^W\, G_k^*$, et sa fonction caractéristique est donc donnée par

$$\Phi_k(x, u) = \exp\{i\, u^*\, F_k\, x - \tfrac{1}{2}\, u^*\, G_k\, Q_k^W\, G_k^*\, u\} \ ,$$

pour tout $u \in \mathbb{R}^m$ et tout $x \in \mathbb{R}^m$.

□

(iv) **Rappeler l'expression générale de la loi conditionnelle $\mu_k^-(dx')$ en fonction de la loi conditionnelle $\mu_{k-1}(dx)$ et du noyau markovien $Q_k(x, dx')$.**

Solution

D'après le cours

$$\mu_k^-(dx') = \mu_{k-1}\, Q_k(dx') = \int_{\mathbb{R}^m} \mu_{k-1}(dx)\, Q_k(x, dx') \ .$$

□

(v) **Déduire de (ii), (iii) et (iv) l'expression de la fonction caractéristique $\Phi_{\mu_k^-}(u)$ de la loi conditionnelle $\mu_k^-(dx')$. En déduire que la loi conditionnelle $\mu_k^-(dx')$ est gaussienne et donner l'expression de sa moyenne $\widehat{X}_k^-$ et de sa matrice de covariance P_k^- en fonction de $\widehat{X}_{k-1}$ et de P_{k-1}.**

Solution

Par définition, et en utilisant les résultats obtenus en (ii), (iii) et (iv), on obtient

$$\begin{aligned}
\Phi_{\mu_k^-}(u) &= \int_{\mathbb{R}^m} \exp\{i\, u^*\, x'\}\, \mu_k^-(dx') \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} \exp\{i\, u^*\, x'\}\, \{ \int_{\mathbb{R}^m} \mu_{k-1}(dx)\, Q_k(x, dx')\, \} \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} \{ \int_{\mathbb{R}^m} \exp\{i\, u^*\, x'\}\, Q_k(x, dx')\, \}\, \mu_{k-1}(dx) \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} \Phi_k(x, u)\, \mu_{k-1}(dx) \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} \exp\{i\, u^*\, F_k\, x - \tfrac{1}{2}\, u^*\, G_k\, Q_k^W\, G_k^*\, u\}\, \mu_{k-1}(dx) \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} \exp\{i\, u^*\, F_k\, x\}\, \mu_{k-1}(dx)\, \exp\{-\tfrac{1}{2}\, u^*\, G_k\, Q_k^W\, G_k^*\, u\} \\
&= \Phi_{\mu_{k-1}}(F_k^*\, u)\, \exp\{-\tfrac{1}{2}\, u^*\, G_k\, Q_k^W\, G_k^*\, u\} \\
&= \exp\{i\, u^*\, F_k\, \widehat{X}_{k-1} - \tfrac{1}{2}\, u^*\, F_k\, P_{k-1}\, F_k^*\, u\}\, \exp\{-\tfrac{1}{2}\, u^*\, G_k\, Q_k^W\, G_k^*\, u\} \\
&= \exp\{i\, u^*\, \widehat{X}_k^- - \tfrac{1}{2}\, u^*\, P_k^-\, u\}\ ,
\end{aligned}$$

pour tout $u \in \mathbb{R}^m$, avec

$$\widehat{X}_k^- = F_k\, \widehat{X}_{k-1} \qquad \text{et} \qquad P_k^- = F_k\, P_{k-1}\, F_k^* + G_k\, Q_k^W\, G_k^*\ .$$

On en déduit que la loi conditionnelle $\mu_k^-(dx')$ est gaussienne, de moyenne $\widehat{X}_k^-$ et de matrice de covariance P_k^-, dont les expressions sont données ci–dessus en fonction de $\widehat{X}_{k-1}$ et de P_{k-1}.

□

(vi) **Dans le cas particulier du système linéaire gaussien considéré, donner l'expression de la densité conditionnelle $g_k(x', y')$, paramétrée par $x' \in \mathbb{R}^m$, du vecteur aléatoire Y_k sachant $X_k = x'$. En déduire l'expression de la fonction de vraisemblance $\Psi_k(x') = g_k(x', Y_k)$.**

Solution

Dans le cas particulier où

$$Y_k = H_k\, X_k + V_k\ ,$$

et avec les hypothèses faites, la loi conditionnelle du vecteur aléatoire Y_k sachant $X_k = x'$ est une loi gaussienne, de moyenne $H_k\, x'$ et de matrice de covariance inversible Q^V_k, et cette loi conditionnelle possède donc une densité donnée par

$$g_k(x', y') = \frac{1}{\sqrt{\det(2\,\pi\, Q^V_k)}}\ \exp\{-\tfrac{1}{2}\,(y' - H_k\, x')^*\,(Q^V_k)^{-1}\,(y' - H_k\, x')\}\ ,$$

pour tout $x' \in \mathbb{R}^m$ et tout $y' \in \mathbb{R}^d$. La fonction de vraisemblance est donnée (à une constante multiplicative près) par

$$\Psi_k(x') = \exp\{-\tfrac{1}{2}\,(Y_k - H_k\, x')^*\,(Q^V_k)^{-1}\,(Y_k - H_k\, x')\}\ .$$

pour tout $x' \in \mathbb{R}^m$.

□

(vii) **Rappeler l'expression générale de la loi conditionnelle $\mu_k(dx')$ en fonction de la loi conditionnelle $\mu^-_k(dx')$ et de la fonction de vraisemblance $\Psi_k(x')$. En déduire une première expression, non explicite, de la fonction caractéristique $\Phi_{\mu_k}(u)$ de la loi conditionnelle $\mu_k(dx')$.**

Solution

D'après le cours

$$\mu_k(dx') = c_k\, \Psi_k(x')\, \mu^-_k(dx')\ ,$$

avec la constante de normalisation c_k. On en déduit l'expression de la fonction caractéristique

$$\Phi_{\mu_k}(u) = \int_{\mathbb{R}^m} \exp\{i\, u^*\, x'\}\, \mu_k(dx') = c_k \int_{\mathbb{R}^m} \exp\{i\, u^*\, x'\}\, \Psi_k(x')\, \mu^-_k(dx') = c_k\, F_k(u)\ ,$$

pour tout $u \in \mathbb{R}^m$, avec

$$\begin{aligned} F_k(u) &= \int_{\mathbb{R}^m} \exp\{i\, u^*\, x'\}\, \Psi_k(x')\, \mu^-_k(dx') \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \exp\{i\, u^*\, x'\}\ \exp\{-\tfrac{1}{2}\,(Y_k - H_k\, x')^*\,(Q^V_k)^{-1}\,(Y_k - H_k\, x')\}\, \mu^-_k(dx')\ . \end{aligned}$$

En particulier pour $u = 0$, on obtient $\Phi_{\mu_k}(0) = c_k\, F_k(0) = 1$, avec

$$F_k(0) = \int_{\mathbb{R}^m} \exp\{-\tfrac{1}{2}\,(Y_k - H_k\, x')^*\,(Q^V_k)^{-1}\,(Y_k - H_k\, x')\}\, \mu^-_k(dx')\ .$$

□

Pour pouvoir calculer

$$F_k(u) = \int_{\mathbb{R}^m} \exp\{i\, u^*\, x'\}\ \exp\{-\tfrac{1}{2}\,(Y_k - H_k\, x')^*\,(Q_k^V)^{-1}\,(Y_k - H_k\, x')\}\,\mu_k^-(dx')\ ,$$

pour tout $u \in \mathbb{R}^m$, on définit

$$F_k(u, y') = \int_{\mathbb{R}^m} \exp\{i\, u^*\, x'\}\ \exp\{-\tfrac{1}{2}\,(y' - H_k\, x')^*\,(Q_k^V)^{-1}\,(y' - H_k\, x')\}\,\mu_k^-(dx')\ ,$$

pour tout $u \in \mathbb{R}^m$ et tout $y' \in \mathbb{R}^d$, et on se propose de calculer la transformée de Fourier de la fonction $y' \longmapsto F_k(u, y')$, où $u \in \mathbb{R}^m$ est fixé.

(viii) **Montrer que**

$$\int_{\mathbb{R}^d} \exp\{i\, v^*\, y'\}\ F_k(u, y')\,\frac{dy'}{\sqrt{\det(2\,\pi\, Q_k^V)}}$$
$$= \exp\{i\, u^*\, \widehat{X}_k^- - \tfrac{1}{2}\, u^*\, P_k^-\, u\}\ \exp\{i\, v^*\, H_k\,(\widehat{X}_k^- + i\, P_k^-\, u) - \tfrac{1}{2}\, v^*\, \Xi_k\, v\}\ ,$$

pour tout $v \in \mathbb{R}^d$ et tout $u \in \mathbb{R}^m$, avec $\Xi_k = H_k\, P_k^-\, H_k^* + Q_k^V$.

Solution

Par définition, et en utilisant l'expression de la fonction caractéristique d'une loi gaussienne de moyenne $H_k\, x'$ et de matrice de covariance Q_k^V, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^d} \exp\{i\, v^*\, y'\}\ F_k(u, y')\,\frac{dy'}{\sqrt{\det(2\,\pi\, Q_k^V)}}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \{\int_{\mathbb{R}^m} \exp\{i\, u^*\, x'\}\ \exp\{-\tfrac{1}{2}\,(y' - H_k\, x')^*\,(Q_k^V)^{-1}\,(y' - H_k\, x')\}\,\mu_k^-(dx')\,\}$$
$$\exp\{i\, v^*\, y'\}\,\frac{dy'}{\sqrt{\det(2\,\pi\, Q_k^V)}}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^m} \{\int_{\mathbb{R}^d} \exp\{i\, v^*\, y'\}\ \exp\{-\tfrac{1}{2}\,(y' - H_k\, x')^*\,(Q_k^V)^{-1}\,(y' - H_k\, x')\}\,\frac{dy'}{\sqrt{\det(2\,\pi\, Q_k^V)}}\,\}$$
$$\exp\{i\, u^*\, x'\}\,\mu_k^-(dx')$$

$$= \int_{\mathbb{R}^m} \exp\{i\, u^*\, x'\}\ \exp\{i\, v^*\, H_k\, x' - \tfrac{1}{2}\, v^*\, Q_k^V\, v\}\ \mu_k^-(dx')$$

$$= \int_{\mathbb{R}^m} \exp\{i\,(u + H_k^*\, v)^*\, x'\}\ \mu_k^-(dx')\ \exp\{-\tfrac{1}{2}\, v^*\, Q_k^V\, v\}$$

$$= \Phi_{\mu_k^-}(u + H_k^* v) \; \exp\{-\tfrac{1}{2} v^* Q_k^V v\}$$

$$= \exp\{i (u + H_k^* v)^* \widehat{X}_k^- - \tfrac{1}{2} (u + H_k^* v)^* P_k^- (u + H_k^* v)\} \; \exp\{-\tfrac{1}{2} v^* Q_k^V v\}$$

$$= \exp\{i u^* \widehat{X}_k^- - \tfrac{1}{2} u^* P_k^- u\} \; \exp\{i v^* H_k (\widehat{X}_k^- + i P_k^- u) - \tfrac{1}{2} v^* \Xi_k v\} \; ,$$

pour tout $v \in \mathbb{R}^d$ et tout $u \in \mathbb{R}^m$, avec $\Xi_k = H_k P_k^- H_k^* + Q_k^V$.

□

(ix) **Monter que la matrice de covariance $\Xi_k = H_k P_k^- H_k^* + Q_k^V$ est inversible.**

Solution

D'après l'énoncé, la matrice symétrique Q_k^V est inversible, et la matrice symétrique $\Xi_k = H_k P_k^- H_k^* + Q_k^V \geq Q_k^V$ est donc inversible.

□

(x) **Déduire de (viii) que**

$$F_k(u, y') = \frac{\sqrt{\det Q_k^V}}{\sqrt{\det \Xi_k}} \; \exp\{i u^* \widehat{X}_k^- - \tfrac{1}{2} u^* P_k^- u\}$$

$$\exp\{-\tfrac{1}{2} (y' - H_k (\widehat{X}_k^- + i P_k^- u))^* \Xi_k^{-1} (y' - H_k (\widehat{X}_k^- + i P_k^- u))\} \; ,$$

pour tout $u \in \mathbb{R}^m$ et tout $y' \in \mathbb{R}^d$.

Solution

D'après la formule rappelée en préambule, et compte tenu que la matrice Ξ_k est inversible

$$\int_{\mathbb{R}^d} \exp\{i v^* y'\} \; \exp\{-\tfrac{1}{2} (y' - H_k (\widehat{X}_k^- + i P_k^- u))^* \Xi_k^{-1} (y' - H_k (\widehat{X}_k^- + i P_k^- u))\}$$

$$\frac{dy'}{\sqrt{\det(2 \pi \Xi_k)}} = \exp\{i v^* H_k (\widehat{X}_k^- + i P_k^- u) - \tfrac{1}{2} v^* \Xi_k v\} \; ,$$

pour tout $u \in \mathbb{R}^m$, c'est–à–dire que les deux applications

$$y' \longmapsto F_k(u, y') \, \frac{1}{\sqrt{\det(2 \pi Q_k^V)}} \; ,$$

et

$$y' \longmapsto \exp\{-\tfrac{1}{2} (y' - H_k (\widehat{X}_k^- + i P_k^- u))^* \Xi_k^{-1} (y' - H_k (\widehat{X}_k^- + i P_k^- u))\} \, \frac{1}{\sqrt{\det(2 \pi \Xi_k)}}$$

$$\exp\{i u^* \widehat{X}_k^- - \tfrac{1}{2} u^* P_k^- u\} \; ,$$

ont même transformée de Fourier pour tout $u \in \mathbb{R}^m$, et sont donc égales.

$\square$

(xi) **En déduire l'expression de la fonction caractéristique $\Phi_{\mu_k}(u)$ de la loi conditionnelle $\mu_k(dx')$. En déduire que la loi conditionnelle $\mu_k(dx')$ est gausienne et donner l'expression de sa moyenne $\widehat{X}_k$ et de sa matrice de covariance P_k en fonction de $\widehat{X}_k^-$ et de P_k^-.**

Solution

En développant l'expression suivante tirée de (x), on obtient

$$\begin{aligned}
F_k(u) &= F_k(u, Y_k) \\
&= \frac{\sqrt{\det Q_k^V}}{\sqrt{\det \Xi_k}} \; \exp\{i\, u^*\, \widehat{X}_k^- - \tfrac{1}{2}\, u^*\, P_k^-\, u\} \\
&\quad \exp\{-\tfrac{1}{2}\, (Y_k - H_k\, (\widehat{X}_k^- + i\, P_k^-\, u))^*\, \Xi_k^{-1}\, (Y_k - H_k\, (\widehat{X}_k^- + i\, P_k^-\, u))\,\} \\
&= \frac{\sqrt{\det Q_k^V}}{\sqrt{\det \Xi_k}} \; \exp\{-\tfrac{1}{2}\, (Y_k - H_k\, \widehat{X}_k^-)^*\, \Xi_k^{-1}\, (Y_k - H_k\, \widehat{X}_k^-)\,\} \\
&\quad \exp\{i\, u^*\, (\widehat{X}_k^- + P_k^-\, H_k^*\, \Xi_k^{-1}\, (Y_k - H_k\, \widehat{X}_k^-)) \\
&\qquad - \tfrac{1}{2}\, u^*\, (P_k^- - P_k^-\, H_k^*\, \Xi_k^{-1}\, H_k\, P_k^-)\, u\} \\
&= F_k(0) \; \exp\{i\, u^*\, \widehat{X}_k - \tfrac{1}{2}\, u^*\, P_k\, u\} \; ,
\end{aligned}$$

pour tout $u \in \mathbb{R}^m$, avec

$$\widehat{X}_k = \widehat{X}_k^- + P_k^-\, H_k^*\, \Xi_k^{-1}\, (Y_k - H_k\, \widehat{X}_k^-) \qquad \text{et} \qquad P_k = P_k^- - P_k^-\, H_k^*\, \Xi_k^{-1}\, H_k\, P_k^- \; ,$$

et avec

$$F_k(0) = \frac{\sqrt{\det Q_k^V}}{\sqrt{\det \Xi_k}} \; \exp\{-\tfrac{1}{2}\, (Y_k - H_k\, \widehat{X}_k^-)^*\, \Xi_k^{-1}\, (Y_k - H_k\, \widehat{X}_k^-)\,\} \; .$$

En utilisant l'expression obtenue en (vii) pour la fonction caractéristique de la loi conditionnelle $\mu_k(dx')$, et en utilisant la relation $\Phi_{\mu_k}(0) = c_k\, F_k(0) = 1$, on obtient

$$\begin{aligned}
\Phi_{\mu_k}(u) = c_k\, F_k(u) &= c_k\, F_k(0) \; \exp\{i\, u^*\, \widehat{X}_k - \tfrac{1}{2}\, u^*\, P_k\, u\} \\
&= \exp\{i\, u^*\, \widehat{X}_k - \tfrac{1}{2}\, u^*\, P_k\, u\} \; .
\end{aligned}$$

On en déduit que la loi conditionnelle $\mu_k(dx')$ est gaussienne, de moyenne $\widehat{X}_k$ et de matrice de covariance P_k, dont les expressions sont données ci–dessus en fonction de $\widehat{X}_k^-$ et de P_k^-. En comparant avec l'expression obtenue en (vii) pour $F_k(0)$, on obtient également

$$\int_{\mathbb{R}^m} \exp\{-\tfrac{1}{2}\,(Y_k - H_k\, x')^*\,(Q_k^V)^{-1}\,(Y_k - H_k\, x')\}\, \mu_k^-(dx')$$

$$= \frac{\sqrt{\det Q_k^V}}{\sqrt{\det \Xi_k}}\; \exp\{-\tfrac{1}{2}\,(Y_k - H_k\, \widehat{X}_k^-)^*\, \Xi_k^{-1}\,(Y_k - H_k\, \widehat{X}_k^-)\}\ .$$

$\square$