Université de Rennes 1
DEA STIR
Signal — Télécommunications — Images — Radar
Option Signal

Examen du cours
"Filtre de Kalman et modèles de Markov cachés"
Mercredi 17 décembre 2003, 8:00 à 9:30
— Corrigé —

Problème :

L'objectif de ce problème est de montrer que pour une certaine classe de systèmes non–linéaires (qu'on peut qualifier de systèmes conditionnellement linéaires), le filtre optimal peut s'exprimer, en utilisant la structure particulière du problème, à l'aide d'un filtre optimal sur un espace de dimension réduite, paramétré en chaque point par une distribution de probabilité gaussienne dans l'espace supplémentaire en ce point.

On considère le système suivant, où l'état caché $X_k = (X_k^1, X_k^2)$ est partitionné en deux composantes, avec une équation d'état linéaire par rapport à la première composante, et une fonction d'observation ne dépendant que de la seconde composante

$$\begin{aligned} X_k^1 &= F_1(X_{k-1}^2)\, X_{k-1}^1 + f_1(X_{k-1}^2) + G_1\, W_k \ , \\ X_k^2 &= F_2(X_{k-1}^2)\, X_{k-1}^1 + f_2(X_{k-1}^2) + G_2\, W_k \ , \\ Y_k &= h(X_{k-1}^2, X_k^2) + V_k \ . \end{aligned}$$

On suppose que

- la suite $\{W_k\}$ est un bruit blanc gaussien centré, de matrice de covariance Q_k^W,
- la matrice de covariance $G_2\, Q_k^W\, G_2^*$ est inversible,
- la loi conditionnelle de X_0^1 sachant X_0^2 est gaussienne, de moyenne $m_0^{1|2}(X_0^2)$ et de matrice de covariance $P_0^{1|2}(X_0^2)$,
- la suite $\{V_k\}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, de loi $q_k^V(v)\, dv$,

- les bruits $\{W_k\}$, $\{V_k\}$ et la condition initiale X_0 sont mutuellement indépendants.

(i) **Montrer que la loi conditionnelle**

- de X_k^1 sachant $(X_{0:k}^2, Y_{0:k})$ ne dépend que de $X_{0:k}^2$,
- de X_k^2 sachant $(X_{0:k-1}^2, Y_{0:k-1})$ ne dépend que de $X_{0:k-1}^2$,
- de Y_k sachant $(X_{0:k}^2, Y_{0:k-1})$ ne dépend que de (X_k^2, X_{k-1}^2).

Solution

Les observations $Y_{0:k}$ n'apportent aucune information supplémentaire sur X_k^1, quand on connait déjà $X_{0:k}^2$. En effet, pour toute fonction test ϕ on a

$$\mathbb{E}[\phi(X_k^1) \mid X_{0:k}^2, Y_{0:k}] = \mathbb{E}[\,\mathbb{E}[\phi(X_k^1) \mid X_{0:k}^2, V_{0:k}] \mid X_{0:k}^2, Y_{0:k}]\ ,$$

compte tenu que $\sigma(Y_{0:k}) \subset \sigma(X_{0:k}^2, V_{0:k})$, et on obtient

$$\mathbb{E}[\phi(X_k^1) \mid X_{0:k}^2, V_{0:k}] = \mathbb{E}[\phi(X_k^1) \mid X_{0:k}^2]\ ,$$

compte tenu que $V_{0:k}$ est indépendant de $(X_k^1, X_{0:k}^2)$, d'où le premier résultat.

De même, les observations $Y_{0:k-1}$ n'apportent aucune information supplémentaire sur X_k^2, quand on connait déjà $X_{0:k-1}^2$. En effet, pour toute fonction test ϕ on a

$$\mathbb{E}[\phi(X_k^2) \mid X_{0:k-1}^2, Y_{0:k-1}] = \mathbb{E}[\,\mathbb{E}[\phi(X_k^2) \mid X_{0:k-1}^2, V_{0:k-1}] \mid X_{0:k-1}^2, Y_{0:k-1}]\ ,$$

compte tenu que $\sigma(Y_{0:k-1}) \subset \sigma(X_{0:k-1}^2, V_{0:k-1})$, et on obtient

$$\mathbb{E}[\phi(X_k^2) \mid X_{0:k-1}^2, V_{0:k-1}] = \mathbb{E}[\phi(X_k^2) \mid X_{0:k-1}^2]\ ,$$

compte tenu que $V_{0:k-1}$ est indépendant de $(X_k^2, X_{0:k-1}^2)$, d'où le second résultat.

Finalement, les observations $Y_{0:k-1}$ et les états $X_{0:k-2}^2$ n'apportent aucune information supplémentaire sur Y_k, quand on connait déjà (X_{k-1}^2, X_k^2). En effet, on a d'abord

$$\mathbb{P}[V_k \in dv \mid X_{0:k}^2, V_{0:k-1}] = \mathbb{P}[V_k \in dv]\ ,$$

compte tenu que V_k est indépendant de $(X_{0:k}^2, V_{0:k-1})$, et pour toute fonction test ψ on a

$$\mathbb{E}[\psi(Y_k) \mid X_{0:k}^2, Y_{0:k-1}] = \mathbb{E}[\,\mathbb{E}[\psi(Y_k) \mid X_{0:k}^2, V_{0:k-1}]\ \mid X_{0:k}^2, Y_{0:k-1}]\ ,$$

compte tenu que $\sigma(Y_{0:k-1}) \subset \sigma(X_{0:k-1}^2, V_{0:k-1})$, et on obtient

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[\psi(Y_k) \mid X_{0:k}^2, V_{0:k-1}] \\
&\qquad = \mathbb{E}[\psi(h_k(X_{k-1}^2, X_k^2) + V_k) \mid X_{0:k}^2, V_{0:k-1}] \\
&\qquad = \int \psi(h_k(X_{k-1}^2, X_k^2) + v)\ \mathbb{P}[V_k \in dv \mid X_{0:k}^2, V_{0:k-1}] \\
&\qquad = \int \psi(h_k(X_{k-1}^2, X_k^2) + v)\ \mathbb{P}[V_k \in dv]\ ,
\end{aligned}$$

qui ne dépend que de (X^2_{k-1}, X^2_k), d'où le dernier résultat.

$\square$

(ii) **En utilisant la formule de Bayes et la première relation de la question (i), montrer que**

$$\mathbb{P}[X^1_k \in dx^1_k, X^2_{0:k} \in dx^2_{0:k} \mid Y_{0:k} = y_{0:k}]$$

$$= \mathbb{P}[X^1_k \in dx^1_k \mid X^2_{0:k} = x^2_{0:k}] \, \mathbb{P}[X^2_{0:k} \in dx^2_{0:k} \mid Y_{0:k} = y_{0:k}] \; .$$

Solution

D'après la formule de Bayes

$$\mathbb{P}[X^1_k \in dx^1_k, X^2_{0:k} \in dx^2_{0:k} \mid Y_{0:k} = y_{0:k}]$$

$$= \mathbb{P}[X^1_k \in dx^1_k \mid X^2_{0:k} = x^2_{0:k}, Y_{0:k} = y_{0:k}] \, \mathbb{P}[X^2_{0:k} \in dx^2_{0:k} \mid Y_{0:k} = y_{0:k}]$$

$$= \mathbb{P}[X^1_k \in dx^1_k \mid X^2_{0:k} = x^2_{0:k}] \, \mathbb{P}[X^2_{0:k} \in dx^2_{0:k} \mid Y_{0:k} = y_{0:k}] \; ,$$

où la dernière égalité résulte de la première relation de la question (i).

$\square$

(iii) **En utilisant la formule de Bayes et les deux dernières relations de la question (i), montrer que**

$$\mathbb{P}[X^2_{0:k} \in dx^2_{0:k}, Y_{0:k} \in dy_{0:k}]$$

$$= \mathbb{P}[Y_k \in dy_k \mid X^2_k = x^2_k, X^2_{k-1} = x^2_{k-1}] \, \mathbb{P}[X^2_k \in dx^2_k \mid X^2_{0:k-1} = x^2_{0:k-1}]$$

$$\mathbb{P}[X^2_{0:k-1} \in dx^2_{0:k-1} \mid Y_{0:k-1} = y_{0:k-1}] \, \mathbb{P}[Y_{0:k-1} \in dy_{0:k-1}] \; .$$

Solution

D'après la formule de Bayes

$$\mathbb{P}[X^2_{0:k} \in dx^2_{0:k}, Y_{0:k} \in dy_{0:k}]$$

$$= \mathbb{P}[Y_k \in dy_k \mid X^2_{0:k} = x^2_{0:k}, Y_{0:k-1} = y_{0:k-1}]$$

$$\mathbb{P}[X^2_k \in dx^2_k \mid X^2_{0:k-1} = x^2_{0:k-1}, Y_{0:k-1} = y_{0:k-1}]$$

$$\mathbb{P}[X^2_{0:k-1} \in dx^2_{0:k-1} \mid Y_{0:k-1} = y_{0:k-1}] \, \mathbb{P}[Y_{0:k-1} \in dy_{0:k-1}]$$

$$= \mathbb{P}[Y_k \in dy_k \mid X^2_k = x^2_k, X^2_{k-1} = x^2_{k-1}] \, \mathbb{P}[X^2_k \in dx^2_k \mid X^2_{0:k-1} = x^2_{0:k-1}]$$

$$\mathbb{P}[X^2_{0:k-1} \in dx^2_{0:k-1} \mid Y_{0:k-1} = y_{0:k-1}] \, \mathbb{P}[Y_{0:k-1} \in dy_{0:k-1}] \ ,$$

où la dernière égalité résulte des deux dernières relations de la question (i).

□

(iv) **Montrer que**

$$\mathbb{P}[Y_k \in dy_k \mid X^2_k = x^2_k, X^2_{k-1} = x^2_{k-1}] = q^V_k(y_k - h(x^2_k, x^2_{k-1})) \, dy_k \ ,$$

et en déduire que

$$\mathbb{P}[X^2_{0:k} \in dx^2_{0:k} \mid Y_{0:k} = y_{0:k}]$$

$$= c_k \, q^V_k(y_k - h(x^2_k, x^2_{k-1})) \, \mathbb{P}[X^2_k \in dx^2_k \mid X^2_{0:k-1} = x^2_{0:k-1}]$$

$$\mathbb{P}[X^2_{0:k-1} \in dx^2_{0:k-1} \mid Y_{0:k-1} = y_{0:k-1}\,] \ .$$

Solution

On a d'abord

$$\mathbb{P}[V_k \in dv \mid X^2_k = x^2_k, X^2_{k-1} = x^2_{k-1}] = \mathbb{P}[V_k \in dv] = q^V_k(v) \, dv \ ,$$

compte tenu que V_k est indépendant de (X^2_k, X^2_{k-1}), et pour toute fonction test ψ, on a donc

$$\mathbb{E}[\psi(Y_k) \mid X^2_k = x^2_k, X^2_{k-1} = x^2_{k-1}]$$

$$= \mathbb{E}[\psi(h_k(X^2_{k-1}, X^2_k) + V_k) \mid X^2_k = x^2_k, X^2_{k-1} = x^2_{k-1}]$$

$$= \int \psi(h_k(x^2_{k-1}, x^2_k) + v) \, \mathbb{P}[V_k \in dv \mid X^2_k = x^2_k, X^2_{k-1} = x^2_{k-1}]$$

$$= \int \psi(h_k(x^2_{k-1}, x^2_k) + v) \, q^V_k(v) \, dv$$

$$= \int \psi(y_k) \, q^V_k(y_k - h_k(x^2_{k-1}, x^2_k)) \, dy_k \ ,$$

d'où on déduit que

$$\mathbb{P}[Y_k \in dy_k \mid X^2_k = x^2_k, X^2_{k-1} = x^2_{k-1}] = q^V_k(y_k - h_k(x^2_{k-1}, x^2_k))\, dy_k \ .$$

D'après la formule de Bayes

$$\mathbb{P}[X^2_{0:k} \in dx^2_{0:k}, Y_{0:k} \in dy_{0:k}]$$

$$= \mathbb{P}[X^2_{0:k} \in dx^2_{0:k} \mid Y_{0:k} = y_{0:k}]\, \mathbb{P}[Y_k \in dy_k \mid Y_{0:k-1} = y_{0:k-1}]\, \mathbb{P}[Y_{0:k-1} \in dy_{0:k-1}] \ ,$$

d'où on déduit, en utilisant la réponse à la question (iii), que

$$\mathbb{P}[X^2_{0:k} \in dx^2_{0:k} \mid Y_{0:k} = y_{0:k}]\, \mathbb{P}[Y_k \in dy_k \mid Y_{0:k-1} = y_{0:k-1}]$$

$$= \mathbb{P}[Y_k \in dy_k \mid X^2_k = x^2_k, X^2_{k-1} = x^2_{k-1}]\, \mathbb{P}[X^2_k \in dx^2_k \mid X^2_{0:k-1} = x^2_{0:k-1}]$$

$$\mathbb{P}[X^2_{0:k-1} \in dx^2_{0:k-1} \mid Y_{0:k-1} = y_{0:k-1}]$$

$$= q^V_k(y_k - h_k(x^2_{k-1}, x^2_k))\, dy_k\, \mathbb{P}[X^2_k \in dx^2_k \mid X^2_{0:k-1} = x^2_{0:k-1}]$$

$$\mathbb{P}[X^2_{0:k-1} \in dx^2_{0:k-1} \mid Y_{0:k-1} = y_{0:k-1}] \ .$$

En intégrant par rapport à $x^2_{0:k}$, on en déduit que la distribution de probabilité $\mathbb{P}[Y_k \in dy_k \mid Y_{0:k-1} = y_{0:k-1}]$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue dy_k, d'où

$$\mathbb{P}[X^2_{0:k} \in dx^2_{0:k} \mid Y_{0:k} = y_{0:k}]$$

$$= c_k\, q^V_k(y_k - h_k(x^2_{k-1}, x^2_k))\, \mathbb{P}[X^2_k \in dx^2_k \mid X^2_{0:k-1} = x^2_{0:k-1}]$$

$$\mathbb{P}[X^2_{0:k-1} \in dx^2_{0:k-1} \mid Y_{0:k-1} = y_{0:k-1}] \ ,$$

où la constante de normalisation c_k dépend seulement de $y_{0:k}$.

$\square$

L'étape suivante consiste à montrer par récurrence sur l'instant k, que la loi conditionnelle

- de X^1_k sachant $X^2_{0:k}$ est gaussienne,
- de X^2_k sachant $X^2_{0:k-1}$ est gaussienne.

(v) **Montrer que la loi conditionnelle du couple** (X_k^1, X_k^2) **sachant** $(X_{k-1}^1, X_{0:k-1}^2)$ **est gaussienne, de moyenne**

$$\begin{pmatrix} F_1(X_{k-1}^2)\, X_{k-1}^1 + f_1(X_{k-1}^2) \\ \\ F_2(X_{k-1}^2)\, X_{k-1}^1 + f_2(X_{k-1}^2) \end{pmatrix} \;,$$

et de matrice de covariance

$$\begin{pmatrix} G_1\, Q_k^W\, G_1^* & G_1\, Q_k^W\, G_2^* \\ \\ G_2\, Q_k^W\, G_1^* & G_2\, Q_k^W\, G_2^* \end{pmatrix} \;.$$

Solution

Pour tout couple (u_1, u_2), on a

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[\exp\{i\,(u_1^*\, X_k^1 + u_2^*\, X_k^2)\,\} \mid X_{k-1}^1, X_{0:k-1}^2] \\
&\quad = \mathbb{E}[\exp\{i\, u_1^*\,(F_1(X_{k-1}^2)\, X_{k-1}^1 + f_1(X_{k-1}^2) + G_1\, W_k) \\
&\qquad\qquad + i\, u_2^*\,(F_2(X_{k-1}^2)\, X_{k-1}^1 + f_2(X_{k-1}^2) + G_2\, W_k)\,\} \mid X_{k-1}^1, X_{0:k-1}^2] \\
&\quad = \exp\{i\, u_1^*\,(F_1(X_{k-1}^2)\, X_{k-1}^1 + f_1(X_{k-1}^2)) \\
&\qquad\qquad + i\, u_2^*\,(F_2(X_{k-1}^2)\, X_{k-1}^1 + f_2(X_{k-1}^2))\,\} \\
&\qquad\quad \mathbb{E}[\exp\{i\,(u_1^*\, G_1 + u_2^*\, G_2)\, W_k\} \mid X_{k-1}^1, X_{0:k-1}^2] \;,
\end{aligned}$$

et compte tenu que W_k est indépendant de $(X_{k-1}^1, X_{0:k-1}^2)$, on a

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[\exp\{i\,(u_1^*\, G_1 + u_2^*\, G_2)\, W_k\} \mid X_{k-1}^1, X_{0:k-1}^2] \\
&\quad = \mathbb{E}[\exp\{i\,(u_1^*\, G_1 + u_2^*\, G_2)\, W_k\}\,] \\
&\quad = \exp\{-\tfrac{1}{2}\,(u_1^*\, G_1 + u_2^*\, G_2)\, Q_k^W\, (G_1^*\, u_1 + G_2^*\, u_2)\,\} \\
&\quad = \exp\{-\tfrac{1}{2}\,(u_1^*\, G_1\, Q_k^W\, G_1^*\, u_1 + u_1^*\, G_1\, Q_k^W\, G_2^*\, u_2 \\
&\qquad\qquad + u_2^*\, G_2\, Q_k^W\, G_1^*\, u_1 + u_2^*\, G_2\, Q_k^W\, G_2^*\, u_2)\,\} \;.
\end{aligned}$$

On en déduit que la fonction caractéristique conditionnelle du couple (X_k^1, X_k^2) sachant $(X_{k-1}^1, X_{0:k-1}^2)$, est celle d'une loi gaussienne, de moyenne

$$\begin{pmatrix} F_1(X_{k-1}^2)\, X_{k-1}^1 + f_1(X_{k-1}^2) \\ \\ F_2(X_{k-1}^2)\, X_{k-1}^1 + f_2(X_{k-1}^2) \end{pmatrix} \; ,$$

et de matrice de covariance

$$\begin{pmatrix} G_1\, Q_k^W\, G_1^* & G_1\, Q_k^W\, G_2^* \\ \\ G_2\, Q_k^W\, G_1^* & G_2\, Q_k^W\, G_2^* \end{pmatrix} \; .$$

$\square$

On introduit l'hypothèse de récurrence suivante

Hypothèse H

La loi conditionnelle de X_k^1 sachant $X_{0:k}^2$ est gaussienne, de moyenne $m_k^{1|2}(X_{0:k}^2)$ et de matrice de covariance $P_k^{1|2}(X_{0:k}^2)$.

(vi) **Montrer que l'Hypothèse H est vérifiée à l'instant** 0**.**

Solution

Par hypothèse, la loi conditionnelle de X_0^1 sachant X_0^2 est gaussienne, de moyenne $m_0^{1|2}(X_0^2)$ et de matrice de covariance $P_0^{1|2}(X_0^2)$, c'est–à–dire que l'Hypothèse H est vérifiée à l'instant 0.

$\square$

(vii) **En supposant l'Hypothèse H vérifiée à l'instant** $(k-1)$**, et en utilisant le résultat de la question (v), montrer que la loi conditionnelle du couple** (X_k^1, X_k^2) **sachant** $X_{0:k-1}^2$ **est gaussienne, de moyenne**

$$\begin{pmatrix} m_k^1(X_{0:k-1}^2) \\ \\ m_k^2(X_{0:k-1}^2) \end{pmatrix} \; ,$$

avec pour $i \in \{1,2\}$

$$m_k^i(X_{0:k-1}^2) = F_i(X_{k-1}^2)\, m_{k-1}^{1|2}(X_{0:k-1}^2) + f_i(X_{k-1}^2) \; ,$$

et de matrice de covariance

$$\begin{pmatrix} P_k^{1,1}(X_{0:k-1}^2) & P_k^{1,2}(X_{0:k-1}^2) \\ \\ P_k^{2,1}(X_{0:k-1}^2) & P_k^{2,2}(X_{0:k-1}^2) \end{pmatrix} \; ,$$

avec pour $i, j \in \{1,2\}$

$$P_k^{i,j}(X_{0:k-1}^2) = F_i(X_{k-1}^2)\, P_{k-1}^{1|2}(X_{0:k-1}^2)\, F_j^*(X_{k-1}^2) + G_i\, Q_k^W\, G_j^* \; .$$

Pour tout couple (u_1, u_2), d'après le résultat de la question (v), on a

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[\exp\{i\,(u_1^*\,X_k^1 + u_2^*\,X_k^2)\} \mid X_{0:k-1}^2] \\
&\quad = \mathbb{E}[\,\mathbb{E}[\exp\{i\,(u_1^*\,X_k^1 + u_2^*\,X_k^2)\} \mid X_{k-1}^1, X_{0:k-1}^2] \mid X_{0:k-1}^2] \\
&\quad = \exp\{-\tfrac{1}{2}\,(u_1^*\,G_1\,Q_k^W\,G_1^*\,u_1 + u_1^*\,G_1\,Q_k^W\,G_2^*\,u_2 \\
&\qquad\qquad + u_2^*\,G_2\,Q_k^W\,G_1^*\,u_1 + u_2^*\,G_2\,Q_k^W\,G_2^*\,u_2)\} \\
&\qquad \mathbb{E}[\exp\{i\,u_1^*\,(F_1(X_{k-1}^2)\,X_{k-1}^1 + f_1(X_{k-1}^2)) \\
&\qquad\qquad + i\,u_2^*\,(F_2(X_{k-1}^2)\,X_{k-1}^1 + f_2(X_{k-1}^2))\} \mid X_{0:k-1}^2] \\
&\quad = \exp\{-\tfrac{1}{2}\,(u_1^*\,G_1\,Q_k^W\,G_1^*\,u_1 + u_1^*\,G_1\,Q_k^W\,G_2^*\,u_2 \\
&\qquad\qquad + u_2^*\,G_2\,Q_k^W\,G_1^*\,u_1 + u_2^*\,G_2\,Q_k^W\,G_2^*\,u_2)\} \\
&\qquad \exp\{i\,(u_1^*\,f_1(X_{k-1}^2) + u_2^*\,f_2(X_{k-1}^2))\} \\
&\qquad \mathbb{E}[\exp\{i\,(u_1^*\,F_1(X_{k-1}^2) + u_2^*\,F_2(X_{k-1}^2))\,X_{k-1}^1\} \mid X_{0:k-1}^2]\ ,
\end{aligned}$$

et d'autre part, d'après l'Hypothèse H, on a

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[\exp\{i\,(u_1^*\,F_1(X_{k-1}^2) + u_2^*\,F_2(X_{k-1}^2))\,X_{k-1}^1\} \mid X_{0:k-1}^2] \\
&\quad = \exp\{i\,(u_1^*\,F_1(X_{k-1}^2) + u_2^*\,F_2(X_{k-1}^2))\,m_{k-1}^{1|2}(X_{0:k-1}^2)\} \\
&\qquad \exp\{-\tfrac{1}{2}\,(u_1^*\,F_1(X_{k-1}^2) + u_2^*\,F_2(X_{k-1}^2))\,P_{k-1}^{1|2}(X_{0:k-1}^2) \\
&\qquad\qquad (F_1^*(X_{k-1}^2)\,u_1 + F_2^*(X_{k-1}^2)\,u_2)\} \\
&\quad = \exp\{i\,(u_1^*\,F_1(X_{k-1}^2)\,m_{k-1}^{1|2}(X_{0:k-1}^2) + u_2^*\,F_2(X_{k-1}^2)\,m_{k-1}^{1|2}(X_{0:k-1}^2))\} \\
&\qquad \exp\{-\tfrac{1}{2}\,(u_1^*\,F_1(X_{k-1}^2)\,P_{k-1}^{1|2}(X_{0:k-1}^2)\,F_1^*(X_{k-1}^2)\,u_1 \\
&\qquad\qquad + u_1^*\,F_1(X_{k-1}^2)\,P_{k-1}^{1|2}(X_{0:k-1}^2)\,F_2^*(X_{k-1}^2)\,u_2
\end{aligned}$$

$$+ \, u_2^* \, F_2(X^2_{k-1}) \, P^{1|2}_{k-1}(X^2_{0:k-1}) \, F_1^*(X^2_{k-1}) \, u_1$$

$$+ \, u_2^* \, F_2(X^2_{k-1}) \, P^{1|2}_{k-1}(X^2_{0:k-1}) \, F_2^*(X^2_{k-1}) \, u_2)\} \; .$$

On en déduit que la fonction caractéristique conditionnelle du couple (X^1_k, X^2_k) sachant $X^2_{0:k-1}$, est celle d'une loi gaussienne, de moyenne

$$\begin{pmatrix} m^1_k(X^2_{0:k-1}) \\ \\ m^2_k(X^2_{0:k-1}) \end{pmatrix} \; ,$$

avec pour $i \in \{1, 2\}$

$$m^i_k(X^2_{0:k-1}) = F_i(X^2_{k-1}) \, m^{1|2}_{k-1}(X^2_{0:k-1}) + f_i(X^2_{k-1}) \; ,$$

et de matrice de covariance

$$\begin{pmatrix} P^{1,1}_k(X^2_{0:k-1}) & P^{1,2}_k(X^2_{0:k-1}) \\ \\ P^{2,1}_k(X^2_{0:k-1}) & P^{2,2}_k(X^2_{0:k-1}) \end{pmatrix} \; ,$$

avec pour $i, j \in \{1, 2\}$

$$P^{i,j}_k(X^2_{0:k-1}) = F_i(X^2_{k-1}) \, P^{1|2}_{k-1}(X^2_{0:k-1}) \, F_j^*(X^2_{k-1}) + G_i \, Q^W_k \, G_j^* \; .$$

---------- □

(viii) **Que peut–on en déduire sur la loi conditionnelle de X^2_k sachant $X^2_{0:k-1}$?**

---------- Solution ----------

À partir de la loi conditionnelle du couple (X^1_k, X^2_k) sachant $X^2_{0:k-1}$, on obtient facilement la loi conditionnelle de X^2_k sachant $X^2_{0:k-1}$. Cette loi est donc gaussienne, de moyenne

$$m^2_k(X^2_{0:k-1}) = F_2(X^2_{k-1}) \, m^{1|2}_{k-1}(X^2_{0:k-1}) + f_2(X^2_{k-1}) \; ,$$

et de matrice de covariance

$$P^{2,2}_k(X^2_{0:k-1}) = F_2(X^2_{k-1}) \, P^{1|2}_{k-1}(X^2_{0:k-1}) \, F_2^*(X^2_{k-1}) + G_2 \, Q^W_k \, G_2^* \; .$$

---------- □

(ix) **Montrer que la matrice $P^{2,2}_k(X^2_{0:k-1})$ est inversible.**

Solution

La matrice symétrique semi–définie positive $P_k^{2,2}(X_{0:k-1}^2)$ est minorée par la matrice symétrique $G_2\, Q_k^W\, G_2^*$ qui est inversible, donc définie positive, par hypothèse. Il en résulte que la matrice symétrique $P_k^{2,2}(X_{0:k-1}^2)$ est définie positive, donc inversible.

$\square$

(x) **En utilisant le résultat de la question (vii), montrer que la loi conditionnelle de X_k^1 sachant $X_{0:k}^2$ est gaussienne, de moyenne**

$$m_k^{1|2}(X_{0:k}^2) \;=\; m_k^1(X_{0:k-1}^2) + P_k^{1,2}(X_{0:k-1}^2)\,[\,P_k^{2,2}(X_{0:k-1}^2)\,]^{-1}\,[\,X_k^2 - m_k^2(X_{0:k-1}^2)\,]\ ,$$

et de matrice de covariance

$$P_k^{1|2}(X_{0:k}^2) = P_k^{1,1}(X_{0:k-1}^2) - P_k^{1,2}(X_{0:k-1}^2)\,[\,P_k^{2,2}(X_{0:k-1}^2)\,]^{-1}\,P_k^{2,1}(X_{0:k-1}^2)\ ,$$

c'est–à–dire que l'Hypothèse H est vérifiée à l'instant k.

Solution

Il résulte de la question (vii) que la loi conditionnelle du couple (X_k^1, X_k^2) sachant $X_{0:k-1}^2$ est gaussienne, de moyenne

$$\begin{pmatrix} m_k^1(X_{0:k-1}^2) \\ \\ m_k^2(X_{0:k-1}^2) \end{pmatrix}\ ,$$

et de matrice de covariance

$$\begin{pmatrix} P_k^{1,1}(X_{0:k-1}^2) & P_k^{1,2}(X_{0:k-1}^2) \\ \\ P_k^{2,1}(X_{0:k-1}^2) & P_k^{2,2}(X_{0:k-1}^2) \end{pmatrix}\ ,$$

où le bloc inférieur droit $P_k^{2,2}(X_{0:k-1}^2)$ est inversible d'après le résultat de la question (ix). On en déduit que la loi conditionnelle de X_k^1 sachant X_k^2 et $X_{0:k-1}^2$ est gaussienne, de moyenne

$$m_k^{1|2}(X_{0:k}^2) = m_k^1(X_{0:k-1}^2) + P_k^{1,2}(X_{0:k-1}^2)\,[\,P_k^{2,2}(X_{0:k-1}^2)\,]^{-1}\,[\,X_k^2 - m_k^2(X_{0:k-1}^2)\,]\ ,$$

et de matrice de covariance

$$P_k^{1|2}(X_{0:k}^2) = P_k^{1,1}(X_{0:k-1}^2) - P_k^{1,2}(X_{0:k-1}^2)\,[\,P_k^{2,2}(X_{0:k-1}^2)\,]^{-1}\,P_k^{2,1}(X_{0:k-1}^2)\ ,$$

c'est–à–dire que l'Hypothèse H est vérifiée à l'instant k.

$\square$

Dans la suite, la notation $\Gamma(\cdot \mid m, \Sigma)$ désigne la distribution de probabilité gaussienne, de moyenne m et de matrice de covariance Σ, et la notation c_k désigne une constante de normalisation, dont l'expression exacte peut varier selon les cas.

(xi) **En rassemblant les résultats obtenus, montrer que la loi conditionnelle jointe de $(X_k^1, X_{0:k}^2)$ sachant $Y_{0:k}$ peut se décomposer la façon suivante**

$$\mathbb{P}[X_k^1 \in dx_k^1, X_{0:k}^2 \in dx_{0:k}^2 \mid Y_{0:k}]$$

$$= \Gamma(dx_k^1 \mid m_k^{1|2}(x_{0:k}^2), P_k^{1|2}(x_{0:k}^2))$$

$$c_k \; q_k^V(Y_k - h(x_k^2, x_{k-1}^2)) \; \Gamma(dx_k^2 \mid m_k^2(x_{0:k-1}^2), P_k^{2,2}(x_{0:k-1}^2))$$

$$\mathbb{P}[X_{0:k-1}^2 \in dx_{0:k-1}^2 \mid Y_{0:k-1}] \; .$$

Solution

D'après la réponse aux questions (ii) et (iv)

$$\mathbb{P}[X_k^1 \in dx_k^1, X_{0:k}^2 \in dx_{0:k}^2 \mid Y_{0:k}]$$

$$= \mathbb{P}[X_k^1 \in dx_k^1 \mid X_{0:k}^2 = x_{0:k}^2]$$

$$c_k \; q_k^V(Y_k - h(x_k^2, x_{k-1}^2)) \; \mathbb{P}[X_k^2 \in dx_k^2 \mid X_{0:k-1}^2 = x_{0:k-1}^2]$$

$$\mathbb{P}[X_{0:k-1}^2 \in dx_{0:k-1}^2 \mid Y_{0:k-1}] \; .$$

D'après la réponse à la question (x)

$$\mathbb{P}[X_k^1 \in dx_k^1 \mid X_{0:k}^2 = x_{0:k}^2] = \Gamma(dx_k^1 \mid m_k^{1|2}(x_{0:k}^2), P_k^{1|2}(x_{0:k}^2)) \; ,$$

et d'après la réponse à la question (vii)

$$\mathbb{P}[X_k^2 \in dx_k^2 \mid X_{0:k-1}^2 = x_{0:k-1}^2] = \Gamma(dx_k^2 \mid m_k^2(x_{0:k-1}^2), P_k^{2,2}(x_{0:k-1}^2)) \; .$$

□

(xii) **En intégrant par rapport à dx_k^1, et en itérant le résultat obtenu, montrer que**

$$\mathbb{P}[X_{0:k-1}^2 \in dx_{0:k-1}^2 \mid Y_{0:k-1}]$$

$$= c_k \prod_{p=1}^{k-1} q_p^V(Y_p - h(x_p^2, x_{p-1}^2)) \; \prod_{p=1}^{k-1} \Gamma(dx_p^2 \mid m_p^2(x_{0:p-1}^2), P_p^{2,2}(x_{0:p-1}^2))$$

$$\mathbb{P}[X_0^2 \in dx_0^2] \; .$$

Solution

En intégrant par rapport à dx_k^1 l'expression obtenue à la question (xi), on obtient

$$\mathbb{P}[X_{0:k}^2 \in dx_{0:k}^2 \mid Y_{0:k}]$$
$$= c_k \, q_k^V(Y_k - h(x_k^2, x_{k-1}^2)) \, \Gamma(dx_k^2 \mid m_k^2(x_{0:k-1}^2), P_k^{2,2}(x_{0:k-1}^2))$$
$$\mathbb{P}[X_{0:k-1}^2 \in dx_{0:k-1}^2 \mid Y_{0:k-1}] \ ,$$

d'où

$$\mathbb{P}[X_{0:k-1}^2 \in dx_{0:k-1}^2 \mid Y_{0:k-1}]$$
$$= c_k \prod_{p=1}^{k-1} q_p^V(Y_p - h(x_p^2, x_{p-1}^2)) \prod_{p=1}^{k-1} \Gamma(dx_p^2 \mid m_p^2(x_{0:p-1}^2), P_p^{2,2}(x_{0:p-1}^2))$$
$$\mathbb{P}[X_0^2 \in dx_0^2] \ ,$$

en itérant entre 0 et $(k-1)$.

$\square$

(xiii) **En déduire que**

$$\mathbb{P}[X_k^1 \in dx_k^1, X_{0:k}^2 \in dx_{0:k}^2 \mid Y_{0:k}]$$
$$= \Gamma(dx_k^1 \mid m_k^{1|2}(x_{0:k}^2), P_k^{1|2}(x_{0:k}^2))$$
$$c_k \prod_{p=1}^{k} q_p^V(Y_p - h(x_p^2, x_{p-1}^2)) \prod_{p=1}^{k} \Gamma(dx_p^2 \mid m_p^2(x_{0:p-1}^2), P_p^{2,2}(x_{0:p-1}^2))$$
$$\mathbb{P}[X_0^2 \in dx_0^2] \ .$$

Solution

En reportant l'expression obtenue à la question (xii) dans l'expression obtenue à la question (xi), on obtient

$$\mathbb{P}[X_k^1 \in dx_k^1, X_{0:k}^2 \in dx_{0:k}^2 \mid Y_{0:k}]$$

$$
\begin{aligned}
&= \Gamma(dx_k^1 \mid m_k^{1|2}(x_{0:k}^2), P_k^{1|2}(x_{0:k}^2)) \\
&\qquad c_k \; q_k^V(Y_k - h(x_k^2, x_{k-1}^2)) \; \Gamma(dx_k^2 \mid m_k^2(x_{0:k-1}^2), P_k^{2,2}(x_{0:k-1}^2)) \\
&\qquad c_k \; \prod_{p=1}^{k-1} q_p^V(Y_p - h(x_p^2, x_{p-1}^2)) \; \prod_{p=1}^{k-1} \Gamma(dx_p^2 \mid m_p^2(x_{0:p-1}^2), P_p^{2,2}(x_{0:p-1}^2)) \\
&\qquad\qquad \mathbb{P}[X_0^2 \in dx_0^2] \\
&= \Gamma(dx_k^1 \mid m_k^{1|2}(x_{0:k}^2), P_k^{1|2}(x_{0:k}^2)) \\
&\qquad c_k \; \prod_{p=1}^{k} q_p^V(Y_p - h(x_p^2, x_{p-1}^2)) \; \prod_{p=1}^{k} \Gamma(dx_p^2 \mid m_p^2(x_{0:p-1}^2), P_p^{2,2}(x_{0:p-1}^2)) \\
&\qquad\qquad \mathbb{P}[X_0^2 \in dx_0^2] \; .
\end{aligned}
$$

$\square$