École Nationale Supérieure de Techniques Avancées

filière Commande des Systèmes, 2011–2012

mercredi 19 octobre 2011

cours B7–1 (5/5)

Filtrage Bayésien et Approximation Particulaire

François Le Gland

INRIA Rennes

http://www.irisa.fr/aspi/legland/ensta/

Théorèmes limites pour les approximations particulaires

- distributions normalisées et non–normalisées
- erreur dans $\mathbb{L}^p$ pour les approximations particulaires
- TCL conditionnel
- TCL pour les approximations particulaires

évolution (non–linéaire) de la distribution normalisée

$$\mu_{k-1} \xrightarrow{\text{mutation}} \eta_k = \mu_{k-1}\, Q_k \xrightarrow{\text{pondération}} \mu_k = g_k \cdot \eta_k$$

avec la condition initiale $\mu_0 = g_0 \cdot \eta_0$, où la notation $\cdot$ désigne le produit projectif

difficulté du problème mesurée par le rapport

$$r_k = \frac{\sup_{x \in E} g_k(x)}{\langle \eta_k , g_k \rangle} \geq 1$$

approximation particulaire (éventuellement) pondérée

$$\eta_k \approx \eta_k^N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\xi_k^i} \qquad \text{et} \qquad \mu_k \approx \mu_k^N = \sum_{i=1}^N w_k^i\, \delta_{\xi_k^i}$$

avec la condition initiale $\mu_0^N = g_0 \cdot \eta_0^N$ et $\eta_0^N = S^N(\eta_0)$

immédiatement à partir de la définition

$$\mu_k^N = g_k \cdot \eta_k^N = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^N g_k(\xi_k^i)\; \delta_{\xi_k^i}}{\displaystyle\sum_{j=1}^N g_k(\xi_k^j)} = \sum_{i=1}^N w_k^i \, \delta_{\xi_k^i}$$

est automatiquement sous la forme recherchée, et

$$\langle \eta_k^N , g_k \rangle = \frac{1}{N} \; \sum_{i=1}^N g_k(\xi_k^i)$$

en revanche

$$\mu_{k-1}^N \, Q_k = \sum_{i=1}^N w_{k-1}^i \; m_k^i \qquad \text{avec} \qquad m_k^i(dx') = Q_k(\xi_{k-1}^i, dx')$$

apparaît seulement sous la forme d'un mélange fini, et l'approximation

$$\eta_k^N \approx \mu_{k-1}^N \, Q_k$$

doit encore être précisée

évolution (linéaire) de la distribution non–normalisée

$$\gamma_k = \gamma_{k-1}\, R_k = g_k\ (\gamma_{k-1}\, Q_k) = g_k\ (\mu_{k-1}\, Q_k)\ \langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle = g_k\ \eta_k\ \langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle$$

avec la condition initiale $\gamma_0 = g_0\ \eta_0$: clairement

$$\langle \gamma_k, 1 \rangle = \langle \eta_k, g_k \rangle\ \langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle \qquad \text{et} \qquad \langle \gamma_0, 1 \rangle = \langle \eta_0, g_0 \rangle \qquad (\star)$$

approximation particulaire proposée

$$\gamma_k^N = g_k\ \eta_k^N\ \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle$$

avec la condition initiale $\gamma_0^N = g_0\ \eta_0^N$ et $\eta_0^N = S^N(\eta_0)$: clairement

$$\langle \gamma_k^N, 1 \rangle = \langle \eta_k^N, g_k \rangle\ \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle \qquad \text{et} \qquad \langle \gamma_0^N, 1 \rangle = \langle \eta_0^N, g_0 \rangle \qquad (\star\star)$$

d'où on déduit que

$$\frac{\gamma_k^N}{\langle \gamma_k^N, 1 \rangle} = g_k \cdot \eta_k^N = \mu_k^N \qquad \text{et} \qquad \frac{\gamma_0^N}{\langle \gamma_0^N, 1 \rangle} = g_0 \cdot \eta_0^N = \mu_0^N$$

$\longrightarrow$ la version normalisée de l'approximation γ_k^N proposée coïncide avec l'approximation μ_k^N

en itérant les relations $(\star)$ et $(\star\star)$, on obtient

$$\langle \gamma_n, 1 \rangle = \prod_{k=0}^{n} \langle \eta_k, g_k \rangle \qquad \text{et} \qquad \langle \gamma_n^N, 1 \rangle = \prod_{k=0}^{n} \langle \eta_k^N, g_k \rangle$$

Remarque clé pour la récurrence : pour tout $k = 1 \cdots n$, on a par différence

$$\gamma_k^N - \gamma_k \;=\; g_k \, \eta_k^N \, \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle - g_k \, (\gamma_{k-1} \, Q_k)$$

$$=\; g_k \, (\gamma_{k-1}^N \, Q_k - \gamma_{k-1} \, Q_k) + g_k \, (\eta_k^N - \mu_{k-1}^N \, Q_k) \, \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle$$

de sorte que

$$\langle \gamma_k^N - \gamma_k, \phi \rangle = \langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1}, Q_k(g_k \, \phi) \rangle + \langle \eta_k^N - \mu_{k-1}^N \, Q_k, g_k \, \phi \rangle \, \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle$$

pour toute fonction ϕ mesurable bornée

décomposition de l'erreur au rang k, évaluée pour la fonction ϕ, en

- erreur au rang $(k-1)$, évaluée pour la fonction $R_k \, \phi = Q_k(g_k \, \phi)$
- et erreur locale d'approximation Monte Carlo

erreur dans $\mathbb{L}^p$ pour les approximations particulaires

Théorème pour la constante de normalisation et pour la distribution normalisée

$$\mathbb{E}|\,\frac{\langle \gamma_n^N, 1\rangle}{\langle \gamma_n, 1\rangle} - 1\,| \leq z_n^N \qquad \text{et} \qquad \sup_{\phi\,:\,\|\phi\|=1} \mathbb{E}|\,\langle \mu_n^N - \mu_n, \phi\rangle\,| \leq 2\, z_n^N$$

respectivement, où la suite $\{z_k^N\}$ vérifie la récurrence linéaire

$$z_k^N \leq r_k\, (1 + \frac{1}{\sqrt{N}})\, z_{k-1}^N + \frac{r_k}{\sqrt{N}} \qquad \text{et} \qquad z_0^N \leq \frac{r_0}{\sqrt{N}}$$

estimations similaires dans $\mathbb{L}^p$ pour tout $p \geq 1$ (en utilisant les inégalités de Marcinkiewicz–Zygmund)

Remarque pour toute fonction ϕ mesurable bornée

$$\langle \mu_n^N - \mu_n, \phi \rangle = \frac{\langle \gamma_n^N, \phi \rangle}{\langle \gamma_n^N, 1 \rangle} - \frac{\langle \gamma_n, \phi \rangle}{\langle \gamma_n, 1 \rangle} = \frac{\langle \gamma_n^N - \gamma_n, \phi \rangle}{\langle \gamma_n, 1 \rangle} - \langle \mu_n^N, \phi \rangle \frac{\langle \gamma_n^N - \gamma_n, 1 \rangle}{\langle \gamma_n, 1 \rangle}$$

de sorte que

$$| \langle \mu_n^N - \mu_n, \phi \rangle | \leq | \frac{\langle \gamma_n^N - \gamma_n, \phi \rangle}{\langle \gamma_n, 1 \rangle} | + \|\phi\| \, | \frac{\langle \gamma_n^N - \gamma_n, 1 \rangle}{\langle \gamma_n, 1 \rangle} |$$

ce qui montre que

$$\sup_{\phi \,:\, \|\phi\|=1} \mathbb{E}| \langle \mu_n^N - \mu_n, \phi \rangle | \leq 2 \sup_{\phi \,:\, \|\phi\|=1} \mathbb{E}| \frac{\langle \gamma_n^N - \gamma_n, \phi \rangle}{\langle \gamma_n, 1 \rangle} |$$

et pour démontrer le Théorème il suffit donc de prouver que la suite définie par

$$z_k^N = \sup_{\phi \,:\, \|\phi\|=1} \mathbb{E}| \frac{\langle \gamma_k^N - \gamma_k, \phi \rangle}{\langle \gamma_k, 1 \rangle} |$$

pour tout $k = 0, 1 \cdots n$ vérifie la relation de récurrence linéaire

Preuve du Théorème on rappelle que

$$\mathbb{E}|\,\langle \eta_0^N - \eta_0, \phi\rangle\,| \leq \frac{1}{\sqrt{N}}\,\|\phi\|$$

▶ pour $k = 0$, on a

$$\langle \gamma_0^N - \gamma_0, \phi\rangle = \langle \eta_0^N - \eta_0, g_0\,\phi\rangle$$

pour toute fonction ϕ mesurable bornée, on remarque que

$$\mathbb{E}|\,\langle \eta_0^N - \eta_0, g_0\,\phi\rangle\,| \leq \frac{1}{\sqrt{N}}\ \sup_{x\in E} g_0(x)\ \|\phi\|$$

et en divisant par $\langle \gamma_0, 1\rangle = \langle \eta_0, g_0\rangle$ on obtient

$$z_0^N = \sup_{\phi\,:\,\|\phi\|=1} \mathbb{E}|\,\frac{\langle \gamma_0^N - \gamma_0, \phi\rangle}{\langle \gamma_0, 1\rangle}\,| \leq \frac{1}{\sqrt{N}}\ \frac{\sup\limits_{x\in E} g_0(x)}{\langle \eta_0, g_0\rangle} = \frac{r_0}{\sqrt{N}}$$

on rappelle que

$$\mathbb{E}[\,|\,\langle \eta_k^N - \mu_{k-1}^N\, Q_k, \phi \rangle\,|\,|\,\mathcal{F}_{k-1}^N\,] \leq \frac{1}{\sqrt{N}}\,\|\phi\|$$

où $\mathcal{F}_{k-1}^N$ dénote la tribu engendrée par les systèmes de particules jusqu'à la $(k-1)$–ème génération

▶ pour tout $k = 1 \cdots n$, on a (clé pour la récurrence)

$$\begin{aligned}\gamma_k^N - \gamma_k \;&=\; g_k\, \eta_k^N\, \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle - g_k\, (\gamma_{k-1}\, Q_k) \\ &=\; g_k\, (\gamma_{k-1}^N\, Q_k - \gamma_{k-1}\, Q_k) + g_k\, (\eta_k^N - \mu_{k-1}^N\, Q_k)\, \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle\end{aligned}$$

de sorte que

$$\langle \gamma_k^N - \gamma_k, \phi \rangle = \langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1}, Q_k(g_k\, \phi) \rangle + \langle \eta_k^N - \mu_{k-1}^N\, Q_k, g_k\, \phi \rangle\, \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle$$

pour toute fonction ϕ mesurable bornée on en déduit que

$$\sup_{\phi\,:\,\|\phi\|=1} \mathbb{E}|\,\langle \gamma_k^N - \gamma_k, \phi\rangle\,|$$

$$\leq \sup_{\phi\,:\,\|\phi\|=1} \mathbb{E}|\,\langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1}, Q_k(g_k\,\phi)\rangle\,|$$

$$+ \sup_{\phi\,:\,\|\phi\|=1} \mathbb{E}[\,|\,\langle \eta_k^N - \mu_{k-1}^N\,Q_k, g_k\,\phi\rangle\,|\,\langle \gamma_{k-1}^N, 1\rangle\,]$$

on remarque que

$$\sup_{\phi\,:\,\|\phi\|=1} \mathbb{E}|\,\langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1}, Q_k(g_k\,\phi)\rangle\,|$$

$$\leq \sup_{x\in E} g_k(x) \sup_{\phi\,:\,\|\phi\|=1} \mathbb{E}|\,\langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1}, \phi\rangle\,|$$

compte tenu que

$$|Q_k(g_k\,\phi)(x)| = |\int_E Q_k(x,dx')\,g_k(x')\,\phi(x')\,| \leq \sup_{x\in E} g_k(x)\,\|\phi\|$$

et en divisant par $\langle \gamma_k, 1 \rangle = \langle \eta_k, g_k \rangle \; \langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle$ on obtient

$$
\begin{aligned}
z_k^N &= \sup_{\phi \,:\, \|\phi\|=1} \mathbb{E}| \, \frac{\langle \gamma_k^N - \gamma_k, \phi \rangle}{\langle \gamma_k, 1 \rangle} \, | \\
&\leq \frac{\sup\limits_{x \in E} g_k(x)}{\langle \eta_k, g_k \rangle} \sup_{\phi \,:\, \|\phi\|=1} \mathbb{E}| \, \frac{\langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1}, \phi \rangle}{\langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle} \, | \\
&\qquad + \sup_{\phi \,:\, \|\phi\|=1} \mathbb{E}| \, \frac{\langle \eta_k^N - \mu_{k-1}^N \, Q_k, g_k \, \phi \rangle \; \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle}{\langle \eta_k, g_k \rangle \; \langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle} \, |
\end{aligned}
$$

i.e.

$$
z_k^N \leq r_k \; z_{k-1}^N + \varepsilon_k^N \qquad (\bullet)
$$

avec l'erreur locale définie par

$$
\varepsilon_k^N = \sup_{\phi \,:\, \|\phi\|=1} \mathbb{E}| \, \frac{\langle \eta_k^N - \mu_{k-1}^N \, Q_k, g_k \, \phi \rangle \; \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle}{\langle \eta_k, g_k \rangle \; \langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle} \, |
$$

comme terme forçant

on remarque que

$$\mathbb{E}[\,|\,\langle \eta_k^N - \mu_{k-1}^N\, Q_k\,, g_k\,\phi\rangle\,|\,|\,\mathcal{F}_{k-1}^N\,] \leq \frac{1}{\sqrt{N}}\ \sup_{x\in E} g_k(x)\ \|\phi\|$$

où $\mathcal{F}_{k-1}^N$ dénote la tribu engendrée par les systèmes de particules jusqu'à la $(k-1)$–ème génération, puis

- en multipliant par $\langle \gamma_{k-1}^N, 1\rangle$ mesurable par rapport à $\mathcal{F}_{k-1}^N$
- et en divisant par $\langle \eta_k, g_k\rangle\ \langle \gamma_{k-1}, 1\rangle$

on obtient

$$\mathbb{E}[\,|\,\frac{\langle \eta_k^N - \mu_{k-1}^N\, Q_k\,, g_k\,\phi\rangle\ \langle \gamma_{k-1}^N, 1\rangle}{\langle \eta_k, g_k\rangle\ \langle \gamma_{k-1}, 1\rangle}\,|\,|\,\mathcal{F}_{k-1}^N\,]$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{N}}\ \frac{\displaystyle\sup_{x\in E} g_k(x)}{\langle \eta_k, g_k\rangle}\ \frac{\langle \gamma_{k-1}^N, 1\rangle}{\langle \gamma_{k-1}, 1\rangle}\ \|\phi\|$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{N}}\ r_k\ (\,1 + |\,\frac{\langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1}, 1\rangle}{\langle \gamma_{k-1}, 1\rangle}\,|\,)\ \|\phi\|$$

on en déduit que

$$\varepsilon_k^N = \sup_{\phi\,:\,\|\phi\|=1} \mathbb{E}|\, \frac{\langle \eta_k^N - \mu_{k-1}^N\, Q_k, g_k\, \phi\rangle\ \langle \gamma_{k-1}^N, 1\rangle}{\langle \eta_k, g_k\rangle\ \langle \gamma_{k-1}, 1\rangle}\,|$$

$$\leq \frac{r_k}{\sqrt{N}}\,(\,1 + \mathbb{E}|\,\frac{\langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1}, 1\rangle}{\langle \gamma_{k-1}, 1\rangle}\,|\,) \leq \frac{r_k}{\sqrt{N}}\,(1 + z_{k-1}^N)$$

et en reportant cette estimation dans $(\bullet)$ on obtient

$$z_k^N \leq r_k\,(1 + \frac{1}{\sqrt{N}})\, z_{k-1}^N + \frac{r_k}{\sqrt{N}} \qquad \square$$

rappel : convergence en distribution

soit X_N et X des v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^m$: on dit que $X_N \Rightarrow X$ en distribution quand $N \uparrow \infty$ ssi

$$\mathbb{E}[f(X_N)] \longrightarrow \mathbb{E}[f(X)] \qquad \text{pour toute fonction } f \text{ continue et bornée}$$

une CNS est la convergence ponctuelle des fonctions caractéristiques, c–à–d

$$\mathbb{E}[\exp\{j\, u^* X_N\}] \longrightarrow \mathbb{E}[\exp\{j\, u^* X\}] \qquad \text{pour tout vecteur } u \in \mathbb{R}^m$$

Lemme de Slutsky

soit X_N, Y_N et X des v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^m$: si

- $X_N \Rightarrow X$ en distribution quand $N \uparrow \infty$
- $|Y_N - X_N| \to 0$ en probabilité quand $N \uparrow \infty$

alors

$$Y_N \Rightarrow X \text{ en distribution quand } N \uparrow \infty$$

TCL conditionnel

Lemme A si $Z_N = Z'_N + Z''_N$, où

- conditionnellement à $\mathcal{F}_N$, la v.a. Z'_N converge en distribution vers une v.a. gaussienne centrée, de variance V', au sens où pour tout u fixé

$$\mathbb{E}[\exp\{j\,u\,Z'_N\} \mid \mathcal{F}_N] \longrightarrow \exp\{-\tfrac{1}{2}\,u^2\,V'\}$$

  en probabilité (et dans $\mathbb{L}^1$, par le théorème de convergence dominée de Lebesgue) quand $N \uparrow \infty$

- la v.a. Z''_N est mesurable par rapport à $\mathcal{F}_N$, et converge en distribution vers une v.a. gaussienne centrée, de variance V'', i.e. pour tout u fixé

$$\mathbb{E}[\exp\{j\,u\,Z''_N\}] \longrightarrow \exp\{-\tfrac{1}{2}\,u^2\,V''\}$$

  quand $N \uparrow \infty$

alors la v.a. $Z_N = Z'_N + Z''_N$ converge en distribution vers une v.a. gaussienne centrée, de variance $V = V' + V''$, quand $N \uparrow \infty$

Preuve il suffit d'exploiter la décomposition suivante

$$\mathbb{E}[\exp\{j\,u\,Z_N\}] - \exp\{-\tfrac{1}{2}\,u^2\,V\}$$

$$= \mathbb{E}[\,\mathbb{E}[\exp\{j\,u\,Z'_N\} \mid \mathcal{F}_N]\;\exp\{j\,u\,Z''_N\}] - \exp\{-\tfrac{1}{2}\,u^2\,V' - \tfrac{1}{2}\,u^2\,V''\}$$

$$= \mathbb{E}[\,[\,\mathbb{E}[\exp\{j\,u\,Z'_N\} \mid \mathcal{F}_N] - \exp\{-\tfrac{1}{2}\,u^2\,V'\}]\;\exp\{j\,u\,Z''_N\}]$$

$$+ \exp\{-\tfrac{1}{2}\,u^2\,V'\}\;[\,\mathbb{E}[\,\exp\{j\,u\,Z''_N\}] - \exp\{-\tfrac{1}{2}\,u^2\,V''\}]$$

et d'après l'inégalité triangulaire, on a

$$|\,\mathbb{E}[\exp\{j\,u\,Z_N\}] - \exp\{-\tfrac{1}{2}\,u^2\,V\}\,|$$

$$\leq \mathbb{E}|\,\mathbb{E}[\exp\{j\,u\,Z'_N\} \mid \mathcal{F}_N] - \exp\{-\tfrac{1}{2}\,u^2\,V'\}\,|$$

$$+\,|\,\mathbb{E}[\exp\{j\,u\,Z''_N\}] - \exp\{-\tfrac{1}{2}\,u^2\,V''\}\,| \longrightarrow 0$$

quand $N \uparrow \infty$ $\square$

Lemme B si $Z'_N = \dfrac{1}{\sqrt{N}} \displaystyle\sum_{i=1}^{N} X_i$, où

- conditionnellement à $\mathcal{F}_N$, les v.a. $(X_1, \cdots, X_N)$ sont i.i.d., centrées et de variance σ_N^2, et bornées, i.e.

  $$\mathbb{E}[X_i \mid \mathcal{F}_N] = 0 \ , \qquad \mathbb{E}[\,|X_i|^2 \mid \mathcal{F}_N] = \sigma_N^2 \qquad \text{et} \qquad |X_i| \leq c_N$$

  pour tout $i = 1 \cdots N$, où la borne c_N est mesurable par rapport à $\mathcal{F}_N$

- et $\sigma_N^2 \to \sigma^2$ et $c_N \to c$ en probabilité quand $N \uparrow \infty$

alors

$$|\,\mathbb{E}[\exp\{j\, u\, Z'_N\} \mid \mathcal{F}_N] - \exp\{-\tfrac{1}{2}\, u^2\, \sigma^2\}\,| \longrightarrow 0$$

en probabilité quand $N \uparrow \infty$

Preuve d'après l'hypothèse d'indépendance conditionnelle, on a

$$\mathbb{E}[\exp\{j\,u\,Z'_N\} \mid \mathcal{F}_N] = \mathbb{E}[\exp\{j\,\frac{u}{\sqrt{N}}\,\sum_{i=1}^{N} X_i\} \mid \mathcal{F}_N] = [\,\mathbb{E}[\exp\{j\,\frac{u\,X}{\sqrt{N}}\} \mid \mathcal{F}_N]\,]^N$$

où la v.a. X est distribuée comme chacune des v.a. $(X_1, \cdots, X_N)$

d'après les majorations classiques

$$|\,\mathbb{E}[\exp\{j\,\frac{u\,X}{\sqrt{N}}\} \mid \mathcal{F}_N] - (1 - \tfrac{1}{2}\,\frac{u^2\,\sigma_N^2}{N})\,| \leq \tfrac{1}{6}\,(c_N\,\frac{|u|}{\sqrt{N}})^3$$

et

$$|\,\exp\{-\tfrac{1}{2}\,\frac{u^2\,\sigma_N^2}{N}\} - (1 - \tfrac{1}{2}\,\frac{u^2\,\sigma_N^2}{N})\,| \leq \tfrac{1}{8}\,(c_N\,\frac{u}{\sqrt{N}})^4$$

et d'après l'inégalité triangulaire, on a

$$|\,\mathbb{E}[\exp\{j\,\frac{u\,X}{\sqrt{N}}\} \mid \mathcal{F}_N] - \exp\{-\tfrac{1}{2}\,\frac{u^2\,\sigma_N^2}{N}\}\,| \leq (c_N\,\frac{|u|}{\sqrt{N}})^3\,(\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{8}\,c_N\,\frac{|u|}{\sqrt{N}})$$

il résulte de la majoration

$$|a^N - b^N| \leq N\,|a - b|$$

valide pour tout $|a| \leq 1$ et tout $|b| \leq 1$, et en particulier valide pour

$$a = \mathbb{E}[\exp\{j\,\frac{u\,X}{\sqrt{N}}\} \mid \mathcal{F}_N] \qquad \text{et} \qquad b = \exp\{-\tfrac{1}{2}\,\frac{u^2\,\sigma_N^2}{N}\}$$

que

$$|\,\mathbb{E}[\exp\{j\,u\,Z'_N\} \mid \mathcal{F}_N] - \exp\{-\tfrac{1}{2}\,u^2\,\sigma_N^2\}\,|$$

$$= |\,[\,\mathbb{E}[\exp\{j\,\frac{u\,X}{\sqrt{N}}\} \mid \mathcal{F}_N]\,]^N - [\,\exp\{-\tfrac{1}{2}\,\frac{u^2\,\sigma_N^2}{N}\}\,]^N\,|$$

$$\leq N\,|\,\mathbb{E}[\exp\{j\,\frac{u\,X}{\sqrt{N}}\} \mid \mathcal{F}_N] - \exp\{-\tfrac{1}{2}\,\frac{u^2\,\sigma_N^2}{N}\}\,|$$

$$\leq N\,(c_N\,\frac{|u|}{\sqrt{N}})^3\,(\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{8}\,c_N\,\frac{|u|}{\sqrt{N}}) \longrightarrow 0$$

en probabilité quand $N \uparrow \infty$

finalement, il résulte de la majoration

$$| \exp\{-x\} - \exp\{-x'\} \,| \leq |x - x'|$$

valide pour tout $x \geq 0$ et tout $x' \geq 0$, que

$$| \exp\{-\tfrac{1}{2}\, u^2\, \sigma_N^2\} - \exp\{-\tfrac{1}{2}\, u^2\, \sigma^2\} \,| \leq \tfrac{1}{2}\, u^2 \,|\, \sigma_N^2 - \sigma^2 \,| \longrightarrow 0$$

en probabilité quand $N \uparrow \infty$, et d'après l'inégalité triangulaire, on a

$$|\, \mathbb{E}[\exp\{j\, u\, Z'_N\} \mid \mathcal{F}_N] - \exp\{-\tfrac{1}{2}\, u^2\, \sigma^2\} \,|$$

$$\leq |\, \mathbb{E}[\exp\{j\, u\, Z'_N\} \mid \mathcal{F}_N] - \exp\{-\tfrac{1}{2}\, u^2\, \sigma_N^2\} \,|$$

$$+ \,| \exp\{-\tfrac{1}{2}\, u^2\, \sigma_N^2\} - \exp\{-\tfrac{1}{2}\, u^2\, \sigma^2\} \,| \longrightarrow 0$$

en probabilité quand $N \uparrow \infty$ $\square$

TCL pour les approximations particulaires

on se limite ici au cas de la redistribution multinomiale, c–à–d

$$\eta_k^N = S^N(\mu_{k-1}^N\, Q_k) = \frac{1}{N}\, \sum_{i=1}^N \delta_{\xi_k^i}$$

où, conditionnellement à la tribu $\mathcal{F}_{k-1}^N$ engendrée par les systèmes de particules jusqu'à la $(k-1)$–ème génération, les v.a. $(\xi_k^1, \cdots, \xi_k^N)$ sont i.i.d. de distribution de probabilité (mélange fini) commune

$$\mu_{k-1}^N\, Q_k(dx') = \sum_{i=1}^N w_{k-1}^i\; Q_k(\xi_{k-1}^i, dx')$$

on rappelle que dans ce cas

$$\mathbb{E}[\,|\frac{1}{N}\, \sum_{i=1}^N \phi(\xi_k^i) - \langle \mu_{k-1}^N\, Q_k, \phi \rangle\,|^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}^N] = \frac{1}{N}\, \mathrm{var}(\phi, \mu_{k-1}^N\, Q_k)$$

Théorème pour la constante de normalisation et pour la distribution normalisée

$$\sqrt{N}\,[\,\frac{\langle \gamma_n^N, 1\rangle}{\langle \gamma_n, 1\rangle} - 1\,] \Longrightarrow \mathcal{N}(0, V_n) \qquad \text{et} \qquad \sqrt{N}\,\langle \mu_n^N - \mu_n, \phi\rangle \Longrightarrow \mathcal{N}(0, v_n(\phi))$$

en distribution quand $N \uparrow \infty$, avec la variance asymptotique définie par

$$V_n = \sum_{k=0}^{n} [\,\frac{\langle \eta_k, (g_k\, R_{k+1:n}\, 1)^2\rangle}{\langle \eta_k, g_k\, R_{k+1:n}\, 1\rangle^2} - 1\,]$$

$$v_n(\phi) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle \eta_k, |g_k\, R_{k+1:n}\,(\phi - \langle \mu_n, \phi\rangle)\,|^2\,\rangle}{\langle \eta_k, g_k\, R_{k+1:n}\, 1\rangle^2}$$

respectivement, où

$$R_{k+1:n}\,\phi(x) = R_{k+1}\cdots R_n\,\phi(x) = \mathbb{E}[\phi(X_n)\, \prod_{p=k+1}^{n} g_p(X_p) \mid X_k = x]$$

pour tout $k = 0, 1 \cdots n$, avec la convention $R_{n+1:n}\,\phi(x) = \phi(x)$

Remarque pour démontrer le Théorème, il suffit de démontrer que

$$\sqrt{N}\,\frac{\langle \gamma_n^N - \gamma_n, \phi \rangle}{\langle \gamma_n, 1 \rangle} \Longrightarrow \mathcal{N}(0, V_n(\phi))$$

en distribution quand $N \uparrow \infty$, avec la variance asymptotique définie par

$$V_n(\phi)\ \langle \gamma_n, 1 \rangle^2 = \mathrm{var}(g_0\, R_{1:n}\, \phi, \eta_0) + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{var}(g_k\, R_{k+1:n}\, \phi, \eta_k)\ \langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle^2$$

ou de manière équivalente par

$$V_n(\phi) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{var}(g_k\, R_{k+1:n}\, \phi, \eta_k)}{\langle \eta_k, g_k\, R_{k+1:n}\, 1 \rangle^2}$$

compte tenu que

$$\langle \gamma_n, 1 \rangle = \langle \gamma_0\, R_{1:n}, 1 \rangle = \langle \eta_0, g_0\, R_{1:n}\, 1 \rangle$$

pour $k = 0$, et que

$$\langle \gamma_n, 1 \rangle = \langle \gamma_{k-1}\, R_{k:n}, 1 \rangle = \langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle\ \langle \eta_k, g_k\, R_{k+1:n}\, 1 \rangle$$

pour tout $k = 1 \cdots n$

on remarque d'abord que

$$V_n = V_n(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{var}(g_k\, R_{k+1:n}\, 1, \eta_k)}{\langle \eta_k, g_k\, R_{k+1:n}\, 1\rangle^2} = \sum_{k=0}^{n} \Big[\, \frac{\langle \eta_k, (g_k\, R_{k+1:n}\, 1)^2\rangle}{\langle \eta_k, g_k\, R_{k+1:n}\, 1\rangle^2} - 1\,\Big]$$

ce qui montre le Théorème pour la constante de normalisation

on remarque aussi que

$$\langle \mu_n^N - \mu_n, \phi\rangle = \langle \frac{\gamma_n^N}{\langle \gamma_n^N, 1\rangle}, \phi - \langle \mu_n, \phi\rangle\,\rangle = \frac{\langle \gamma_n, 1\rangle}{\langle \gamma_n^N, 1\rangle}\; \langle \frac{\gamma_n^N - \gamma_n}{\langle \gamma_n, 1\rangle}, \phi - \langle \mu_n, \phi\rangle\,\rangle$$

pour toute fonction mesurable bornée ϕ, et que $\langle \gamma_n^N, 1\rangle \longrightarrow \langle \gamma_n, 1\rangle$ en probabilité quand $N \uparrow \infty$, ce qui montre le Théorème pour la distribution normalisée (en utilisant le lemme de Slutsky), avec

$$v_n(\phi) = V_n(\phi - \langle \mu_n, \phi\rangle) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{var}(g_k\, R_{k+1:n}\, (\phi - \langle \mu_n, \phi\rangle), \eta_k)}{\langle \eta_k, g_k\, R_{k+1:n}\, 1\rangle^2}$$

on remarque finalement que

$$\mathrm{var}(g_k\, R_{k+1:n}\,(\phi - \langle \mu_n, \phi \rangle), \eta_k) = \langle \eta_k, |g_k\, R_{k+1:n}\,(\phi - \langle \mu_n, \phi \rangle)\,|^2\,\rangle$$

pour tout $k = 0, 1 \cdots n$, compte tenu que

$$\langle \eta_0, g_0\, R_{1:n}\,(\phi - \langle \mu_n, \phi \rangle)\,\rangle = \langle \gamma_0\, R_{1:n}, \phi - \langle \mu_n, \phi \rangle\,\rangle = \langle \gamma_n, \phi - \langle \mu_n, \phi \rangle\,\rangle = 0$$

pour $k = 0$, et que

$$\langle \eta_k, g_k\, R_{k+1:n}\,(\phi - \langle \mu_n, \phi \rangle)\,\rangle = \langle \mu_{k-1}\, R_{k:n}, \phi - \langle \mu_n, \phi \rangle\,\rangle = \frac{\langle \gamma_n, \phi - \langle \mu_n, \phi \rangle\,\rangle}{\langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle} = 0$$

pour tout $k = 1 \cdots n$

Remarque formulation “récursive” équivalente

$$V_n(\phi)\,\langle \gamma_n, 1\rangle^2 = \mathrm{var}(g_0\, R_{1:n}\,\phi, \eta_0) + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{var}(g_k\, R_{k+1:n}\,\phi, \eta_k)\,\langle \gamma_{k-1}, 1\rangle^2$$

$$= \mathrm{var}(g_0\, R_{1:n-1}\, R_n\,\phi, \eta_0) + \sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{var}(g_k\, R_{k+1:n-1}\, R_n\,\phi, \eta_k)\,\langle \gamma_{k-1}, 1\rangle^2$$

$$+ \mathrm{var}(g_n\,\phi, \eta_n)\,\langle \gamma_{n-1}, 1\rangle^2$$

$$= V_{n-1}(R_n\,\phi)\,\langle \gamma_{n-1}, 1\rangle^2 + \mathrm{var}(g_n\,\phi, \eta_n)\,\langle \gamma_{n-1}, 1\rangle^2$$

et en divisant par $\langle \gamma_n, 1\rangle^2 = \langle \eta_n, g_n\rangle^2\,\langle \gamma_{n-1}, 1\rangle^2$ on obtient

$$V_n(\phi) = \frac{V_{n-1}(R_n\,\phi)}{\langle \eta_n, g_n\rangle^2} + \frac{\mathrm{var}(g_n\,\phi, \eta_n)}{\langle \eta_n, g_n\rangle^2} \qquad (\blacksquare)$$

Preuve du Théorème (par récurrence)

▶ pour $k = 0$, on a

$$\langle \gamma_0^N - \gamma_0, \phi \rangle = \langle \eta_0^N - \eta_0, g_0\, \phi \rangle$$

pour toute fonction ϕ mesurable bornée, on remarque que

$$\sqrt{N}\, \langle \eta_0^N - \eta_0, g_0\, \phi \rangle \Longrightarrow \mathcal{N}(0, \mathrm{var}(g_0\, \phi, \eta_0))$$

en distribution quand $N \uparrow \infty$, et en divisant par $\langle \gamma_0, 1 \rangle = \langle \eta_0, g_0 \rangle$ on obtient

$$\sqrt{N}\, \frac{\langle \gamma_0^N - \gamma_0, \phi \rangle}{\langle \gamma_0, 1 \rangle} \Longrightarrow \mathcal{N}(0, \frac{\mathrm{var}(g_0\, \phi, \eta_0)}{\langle \eta_0, g_0 \rangle^2})$$

en distribution quand $N \uparrow \infty$, c'est–à–dire que l'hypothèse de récurrence (■) est vérifiée

▶ pour tout $k = 1 \cdots n$, on a (clé pour la récurrence)

$$\begin{aligned}\gamma_k^N - \gamma_k &= g_k \, \eta_k^N \, \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle - g_k \, (\gamma_{k-1} \, Q_k) \\ &= g_k \, (\gamma_{k-1}^N \, Q_k - \gamma_{k-1} \, Q_k) + g_k \, (\eta_k^N - \mu_{k-1}^N \, Q_k) \, \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle\end{aligned}$$

de sorte que

$$\langle \gamma_k^N - \gamma_k, \phi \rangle = \langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1}, R_k \, \phi \rangle + \langle \eta_k^N - \mu_{k-1}^N \, Q_k, g_k \, \phi \rangle \, \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle$$

pour toute fonction ϕ mesurable bornée

en divisant par $\langle \gamma_k, 1 \rangle = \langle \eta_k, g_k \rangle \, \langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle$ on obtient

$$\begin{aligned}Z_N &= \sqrt{N} \, \frac{\langle \gamma_k^N - \gamma_k, \phi \rangle}{\langle \gamma_k, 1 \rangle} \\ &= \sqrt{N} \, \frac{\langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1}, R_k \, \phi \rangle}{\langle \eta_k, g_k \rangle \, \langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle} + \sqrt{N} \, \frac{\langle \eta_k^N - \mu_{k-1}^N \, Q_k, g_k \, \phi \rangle}{\langle \eta_k, g_k \rangle} \, \frac{\langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle}{\langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle} \\ &= Z''_N + Z'_N\end{aligned}$$

d'après l'hypothèse de récurrence

$$\sqrt{N}\ \frac{\langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1} , R_k\, \phi \rangle}{\langle \gamma_{k-1} , 1 \rangle} \Longrightarrow \mathcal{N}(0, V_{k-1}(R_k\, \phi))$$

en distribution quand $N \uparrow \infty$, et en divisant par $\langle \eta_k , g_k \rangle$ on obtient

$$Z''_N = \sqrt{N}\ \frac{\langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1} , R_k\, \phi \rangle}{\langle \eta_k , g_k \rangle\ \langle \gamma_{k-1} , 1 \rangle} \Longrightarrow \mathcal{N}(0, \frac{V_{k-1}(R_k\, \phi)}{\langle \eta_k , g_k \rangle^2})$$

en distribution quand $N \uparrow \infty$

il reste à étudier

$$Z'_N = \sqrt{N} \, \frac{\langle \eta_k^N - \mu_{k-1}^N \, Q_k \, , g_k \, \phi \rangle}{\langle \eta_k \, , g_k \rangle} \, \frac{\langle \gamma_{k-1}^N \, , 1 \rangle}{\langle \gamma_{k-1} \, , 1 \rangle}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N \frac{g_k(\xi_k^i) \, \phi(\xi_k^i) - \langle \mu_{k-1}^N \, Q_k \, , g_k \, \phi \rangle}{\langle \eta_k \, , g_k \rangle} \, \frac{\langle \gamma_{k-1}^N \, , 1 \rangle}{\langle \gamma_{k-1} \, , 1 \rangle} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N X_i$$

avec

$$X_i = \frac{g_k(\xi_k^i) \, \phi(\xi_k^i) - \langle \mu_{k-1}^N \, Q_k \, , g_k \, \phi \rangle}{\langle \eta_k \, , g_k \rangle} \, \frac{\langle \gamma_{k-1}^N \, , 1 \rangle}{\langle \gamma_{k-1} \, , 1 \rangle}$$

on vérifie que

$$\sigma_N^2 = \mathbb{E}[\, |X_i|^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}^N] = \frac{\mathrm{var}(g_k \, \phi, \mu_{k-1}^N \, Q_k)}{\langle \eta_k \, , g_k \rangle^2} \, \frac{\langle \gamma_{k-1}^N \, , 1 \rangle^2}{\langle \gamma_{k-1} \, , 1 \rangle^2}$$

et

$$|X_i| \leq c_N = 2 \, \frac{\sup\limits_{x \in E} g_k(x)}{\langle \eta_k \, , g_k \rangle} \, \frac{\langle \gamma_{k-1}^N \, , 1 \rangle}{\langle \gamma_{k-1} \, , 1 \rangle} \, \|\phi\|$$

pour tout $i = 1 \cdots N$

clairement

$$\sigma_N^2 \longrightarrow \sigma^2 = \frac{\mathrm{var}(g_k\,\phi,\eta_k)}{\langle \eta_k\,,\,g_k\rangle^2} \qquad \text{et} \qquad c_N \longrightarrow c = \frac{\sup\limits_{x \in E} g_k(x)}{\langle \eta_k\,,\,g_k\rangle}\,\|\phi\|$$

en probabilité quand $N \uparrow \infty$, et grace au Lemme B, on en déduit que

$$|\,\mathbb{E}[\exp\{j\,u\,Z'_N\}\mid \mathcal{F}_N] - \exp\{-\tfrac{1}{2}\,u^2\,\frac{\mathrm{var}(g_k\,\phi,\eta_k)}{\langle \eta_k\,,\,g_k\rangle^2}\}\,| \longrightarrow 0$$

en probabilité quand $N \uparrow \infty$

finalement, grace au Lemme A, on en déduit que

$$Z_N = \sqrt{N}\,\frac{\langle \gamma_k^N - \gamma_k\,,\,\phi\rangle}{\langle \gamma_k\,,\,1\rangle} \Longrightarrow \mathcal{N}(0, V_k(\phi))$$

en distribution quand $N \uparrow \infty$, avec

$$V_k(\phi) = \frac{V_{k-1}(R_k\,\phi)}{\langle \eta_k\,,\,g_k\rangle^2} + \frac{\mathrm{var}(g_k\,\phi,\eta_k)}{\langle \eta_k\,,\,g_k\rangle^2}$$

c'est–à–dire que l'hypothèse de récurrence ($\blacksquare$) est vérifiée $\square$