ENSTA : Filtrage bayésien et approximation particulaire

TP 4 : Options européennes dans le modèle de Black–Scholes

lundi 11 et 18 octobre 2010

Une option européenne est définie comme le droit, qu'il n'est pas obligatoire d'exercer, d'acheter une quantité unitaire d'un actif à la date T et au prix K, la date d'exercice ou de maturité T et le prix d'exercice (strike) K étant fixés par contrat. La question se pose de déterminer le prix auquel une telle action doit être proposé. Dans le modèle de Black–Scholes, le prix unitaire S_t de l'actif à l'instant t est modélisé comme un mouvement brownien géométrique (exponentielle d'un mouvement brownien avec dérive)

$$dS_t = S_t \, (r \, dt + \sigma \, dW_t) \ ,$$

dont la solution explicite est donné par la formule

$$S_t = S_0 \ \exp\{(r - \tfrac{1}{2} \, \sigma^2) \, t + \sigma \, W_t\} \ .$$

La probabilité d'exercice est définie par

$$p = \mathbb{P}[S_T \geq K] = \mathbb{P}[S_0 \ \exp((r - \tfrac{1}{2} \, \sigma^2) \, T + \sigma \, \sqrt{T} \, X) \geq K] \ , \tag{1}$$

et on admettra que le prix de l'option à l'instant 0 est donné par la formule

$$P = e^{-r\,T} \ \mathbb{E}(S_T - K)^+ = e^{-r\,T} \ \mathbb{E}(S_0 \ \exp\{(r - \tfrac{1}{2} \, \sigma^2) \, T\} \ \exp\{\sigma \, \sqrt{T} \, X\} - K)^+ \ , \tag{2}$$

où X est variable aléatoire gaussienne réduite centrée, de distribution de probabilité

$$\eta(dx) = \mathbb{P}[X \in dx] = q(x) \, dx \qquad \text{avec la densité} \qquad q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \, e^{-\frac{1}{2} \, x^2} \ .$$

Dans ce cas particulier très simple, il existe une expression explicite

$$P = S_0 \ N(\frac{\log \dfrac{S_0}{K} + (r + \frac{1}{2} \, \sigma^2) \, T}{\sigma \, \sqrt{T}}) - e^{-r\,T} \ K \ N(\frac{\log \dfrac{S_0}{K} + (r - \frac{1}{2} \, \sigma^2) \, T}{\sigma \, \sqrt{T}}) \ ,$$

où par définition

$$N(d) = \eta([-d, \infty)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \ \int_{-d}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \, x^2} \ dx \ ,$$

et on pourra utiliser la fonction MATLAB `erfc` pour calculer la valeur exacte de la probabilité d'exercice p et du prix P de l'option. Par exemple, pour $S_0 = 70$, $K = 100, 120, 140$, $T = 1$, $r = 0$ et $\sigma = 0.2$, on a

	$K = 100$	$K = 120$	$K = 140$
p	0.0298	0.00259	0.000181
P	0.2481	0.01967	0.001320

L'objectif ici est de calculer numériquement la probabilité d'exercice p et le prix P de l'option en utilisant des méthodes de simulation Monte Carlo. En posant

$$V(x) = S_0 \ \exp((r - \tfrac{1}{2}\,\sigma^2)\,T + \sigma\,\sqrt{T}\ x) \ ,$$

on voit qu'il s'agit, pour un niveau K donné, d'évaluer les quantités

$$p = \mathbb{P}[V(X) \geq K] \qquad \text{et} \qquad P_0 = e^{r\,T}\,P = \mathbb{E}(V(X) - K)^+ \ ,$$

c'est–à–dire qu'il s'agit de calculer des intégrales (ou des espérances mathématiques) dans la queue d'une distribution de probabilité gaussienne, compte tenu que

$$V(x) \geq K \qquad \text{si et seulement si} \qquad x \geq \frac{1}{\sigma\,\sqrt{T}}\,(\log\frac{K}{S_0} - (r - \tfrac{1}{2}\,\sigma^2)\,T) \ .$$

Préliminaires

(i) Montrer que le noyau markovien

$$M(x,dx') = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi\,(1-c^2)}}\ \exp\{-\tfrac{1}{2}\,\frac{(x'-c\,x)^2}{1-c^2}\}\ dx' \ , \qquad \text{avec } |c| < 1,$$

est réversible pour la distribution de probabilité η, c'est–à–dire que

$$\eta(dx)\,M(x,dx') = \eta(dx')\,M(x',dx) \ .$$

(ii) Montrer que pour simuler une variable aléatoire Ξ distribuée selon $M(x,dx')$, où $x \in E$ est fixé, il suffit de simuler une variable aléatoire gaussienne W centrée réduite (variance égale à 1), et de poser $\Xi = c\,x + \sqrt{1-c^2}\ W$. On utilisera dans la suite la valeur numérique $c = 0.9$.

Première étape : niveaux intermédiaires

On introduit une suite croissante

$$S_0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_k < \cdots < a_n = K \ ,$$

de niveaux intermédiaires entre le prix S_0 de l'actif à l'instant 0 et le prix d'exercice K, avec l'idée de tester $(V(X) \geq a_k)$ successivement pour $k = 0, 1, \cdots, n$, au lieu de tester $(V(X) \geq K)$ directement.

Estimation de la probabilité d'exercice p : Pour tout $k = 1, \cdots, n$ on considère la distribution de probabilité

$$\mu_k = g_k \cdot \eta = \frac{g_k\,\eta}{\langle \eta, g_k \rangle} \ ,$$

où par définition $g_k(x) = 1_{(V(x) \geq a_k)}$, c'est–à–dire que

$$\mu_k(dx) = \mathbb{P}[X \in dx \mid V(X) \geq a_k] \qquad \text{et} \qquad \langle \eta, g_k \rangle = \mathbb{P}[V(X) \geq a_k] \ .$$

On va donc dans cette partie

- estimer la probabilité d'exercice

$$p = \mathbb{P}[V(X) \geq K] = \langle \eta, g_n \rangle \ ,$$

- générer un échantillon distribué (approximativement) selon la loi conditionnelle

$$\mu_n(dx) = \mathbb{P}[X \in dx \mid V(X) \geq K] \ ,$$

- et finalement calculer (approximativement) le prix non–actualisé

$$P_0 = \mathbb{E}(V(X) - K)^+ \ ,$$

  grace à la représentation

$$P_0 = p \, \mathbb{E}[\, (V(X) - K)^+ \mid V(X) \geq K] \ .$$

On rappelle que

$$\mu_k = g_k \cdot \eta = g_k \cdot \mu_{k-1} \qquad \text{compte tenu que} \qquad g_k = g_k \, g_{k-1} \ ,$$

que le noyau markovien

$$M_k(x, dx') = M(x, dx') \, g_k(x') + (\, 1 - M \, g_k(x) \,) \, \delta_x(dx') \ ,$$

laisse la distribution de probabilité μ_k invariante, et que pour simuler une variable aléatoire X distribuée selon $M_k(x, dx')$, où $x \in \mathbb{R}$ est fixé, il suffit de générer une variable aléatoire Ξ distribuée selon $M(x, dx')$ — voir ci–dessus — et de poser ensuite : $X = \Xi$, si $V(\Xi) \geq a_k$, et $X = x$ sinon.

(iii) Montrer que

$$p = \langle \eta, g_n \rangle = \langle \eta, g_0 \rangle \ \prod_{k=1}^{n} \langle \mu_{k-1}, g_k \rangle \ .$$

(iv) Mettre en œuvre l'algorithme SIR pour estimer la probabilité d'exercice p, pour générer un échantillon distribué (approximativement) selon la distribution de probabilité conditionnelle μ_n, et pour calculer (approximativement) le prix non–actualisé P_0, et donc le prix P de l'option. On utilisera des niveaux régulièrement espacés entre le prix S_0 de l'actif à l'instant 0 et le prix d'exercice K. On pourra par exemple représenter à l'aide d'un histogramme les approximations particulaires associées aux niveaux intermédiaires, comme à la Figure 2.

Estimation du prix P de l'option : Pour tout $k = 1, \cdots, n$ on considère la distribution de probabilité

$$\mu_k^\sharp = f_k \cdot \eta = \frac{f_k \, \eta}{\langle \eta, f_k \rangle} \ ,$$

où par définition $f_k(x) = (V(x) - a_k)^+$, c'est–à–dire que

$$\langle \eta, f_k \rangle = \mathbb{E}(V(X) - a_k)^+ \ .$$

On va donc dans cette partie estimer le prix non–actualisé

$$P_0 = \mathbb{E}(V(X) - K)^+ = \langle \eta, f_n \rangle \ .$$

(v) Montrer que

$$\mu_k^\sharp = f_k \cdot \eta = g_k^\sharp \cdot \mu_{k-1}^\sharp \ ,$$

avec

$$g_k^\sharp(x) = \frac{f_k(x)}{f_{k-1}(x)} = 1_{(V(x) \geq a_k)} \, \frac{V(x) - a_k}{V(x) - a_{k-1}} \leq 1 \ .$$

(vi) Montrer que le noyau de Metropolis–Hastings

$$M_k^\sharp(x, dx') = M(x, dx') \, r_k(x, x') + (1 - r_k(x)) \, \delta_x(dx') \ ,$$

avec

$$r_k(x, x') = \min(1, \frac{f_k(x')}{f_k(x)}) \qquad \text{et} \qquad r_k(x) = \int_{-\infty}^{\infty} r_k(x, x') \, M(x, dx') \ ,$$

laisse la distribution de probabilité $\mu_k^\sharp$ invariante.

On rappelle que pour simuler une variable aléatoire $X^\sharp$ distribuée selon $M_k^\sharp(x, dx')$, où $x \in \mathbb{R}$ est fixé, il suffit de générer une variable aléatoire Ξ distribuée selon $M(x, dx')$ — voir ci–dessus — et de poser ensuite : $X^\sharp = \Xi$, avec probabilité $r_k(x, \Xi)$, et $X^\sharp = x$, avec probabilité $1 - r_k(x, \Xi)$.

(vii) Montrer que

$$P_0 = \langle \eta, f_n \rangle = \langle \eta, f_0 \rangle \, \prod_{k=1}^{n} \langle \mu_{k-1}^\sharp, g_k^\sharp \rangle \ .$$

(viii) Mettre en œuvre l'algorithme SIR pour estimer le prix non–actualisé P_0, et donc le prix P de l'option, et pour générer un échantillon distribué (approximativement) selon la distribution de probabilité conditionnelle $\mu_n^\sharp$. On utilisera les mêmes niveaux qu'à la question (iv), régulièrement espacés entre le prix S_0 de l'actif à l'instant 0 et le prix d'exercice K. On pourra par exemple représenter à l'aide d'un histogramme les approximations particulaires associées aux niveaux intermédiaires, comme à la Figure 4.

Au–delà du calcul approché de la probabilité d'exercice p et du prix P de l'option, on s'intéressera à la variance de l'erreur d'estimation, dont une valeur approchée sera obtenue en répétant plusieurs simulations de Monte Carlo indépendantes.

Deuxième étape : apprentissage des fonctions d'importance

La distribution d'importance optimale pour le calcul de l'intégrale

$$I = \langle \eta, h \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\, \eta(dx) \ ,$$

où la fonction h est positive, est précisément la distribution de Gibbs–Boltzmann

$$\mu = h \cdot \eta = \frac{h\, \eta}{\langle \eta, h \rangle} \ .$$

On ne peut pas utiliser directement la distribution d'importance optimale μ, car la constante de normalisation $\langle \eta, h \rangle$ est précisément l'intégrale I recherchée, mais en partant d'une approximation particulaire sous la forme d'une distribution empirique pondérée

$$\mu \approx \sum_{i=1}^{N} w_n^i\, \delta_{\xi_n^i} \qquad \text{avec} \qquad \sum_{i=1}^{N} w_n^i = 1 \ ,$$

on peut construire une densité approchée par convolution de l'approximation particulaire avec un noyau régularisant, paramétrée par le nombre N de particules et par la largeur h de la fenêtre, c'est–à–dire

$$\mu(dx) \approx p_{N,h}(x)\, dx \qquad \text{avec} \qquad p_{N,h}(x) = \sum_{i=1}^{N} w_n^i\, K_h(x - \xi_n^i) \ ,$$

où on définit $K_h(u) = h^{-1}\, K(h^{-1}\, u)$ pour tout $h > 0$ à partir d'une densité de probabilité $K(u)$ définie sur $\mathbb{R}$. En utilisant cette approximation comme distribution d'importance, on peut écrire

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\, q(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\, \frac{q(x)}{p_{N,h}(x)}\, p_{N,h}(x)\, dx \ ,$$

et on obtient une seconde approximation de I, paramétrée par le nombre N de particules, par la taille M de l'échantillon et par la largeur h de la fenêtre, c'est–à–dire

$$\frac{1}{M} \sum_{j=1}^{M} h(x_j)\, \frac{q(x_j)}{p_{N,h}(x_j)} \ ,$$

où $(x_1, \cdots, x_M)$ est un M–échantillon distribué selon $p_{N,h}(x)\, dx$.

L'objectif ici est d'appliquer cette approche au calcul de la probabilité d'exercice p et au calcul du prix P de l'option, séparément, en s'appuyant sur les approximations des distributions d'importance optimales μ_n et $\mu_n^\sharp$ obtenues sous la forme de distributions empiriques pondérées aux questions (iv) et (viii), respectivement.

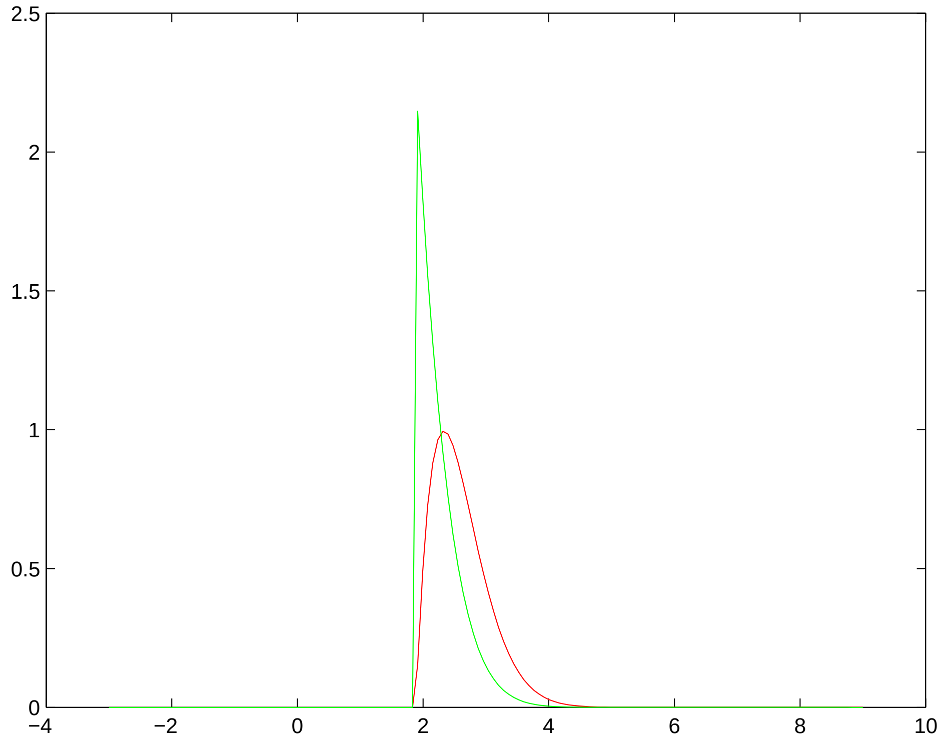

Figure 1: Densités d'importance optimales pour le calcul de la probabilité d'exercice p (en vert) et pour le calcul du prix P de l'option (en rouge)

Estimation de la probabilité d'exercice p : La distribution d'importance

$$\mu_n = g_n \cdot \eta = \frac{g_n \, \eta}{\langle \eta, g_n \rangle} \qquad \text{avec} \qquad g_n(x) = 1_{(V(x) \geq K)} \; ,$$

représentée Figure 1 (en vert), est optimale pour l'estimation de la probabilité d'exercice p, et on suit l'approche proposée pour l'apprentissage de cette distribution d'importance optimale.

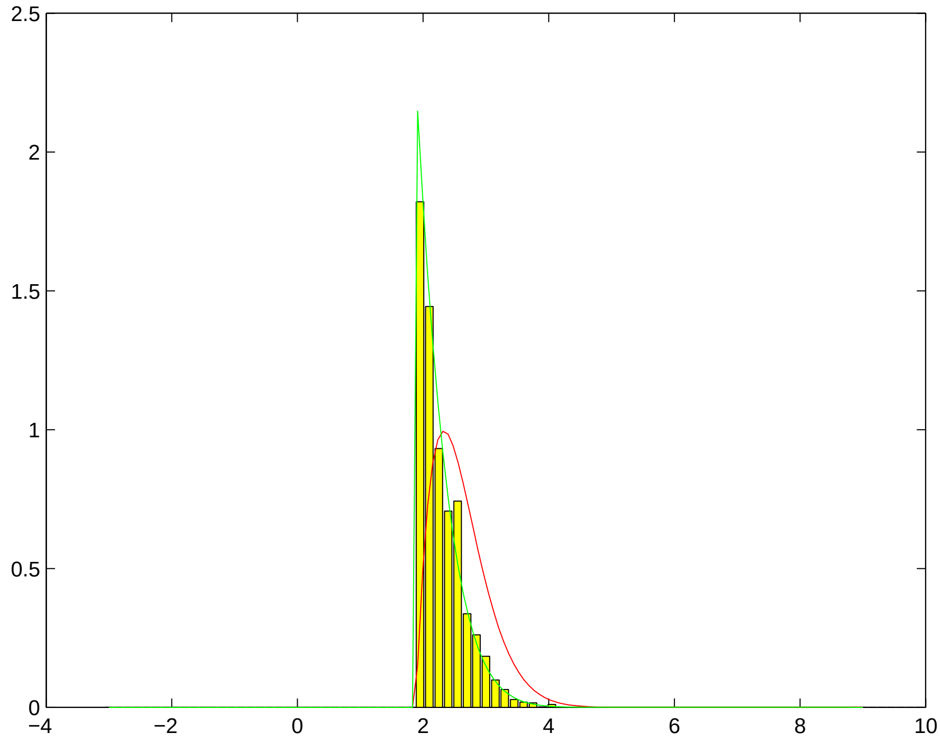

Figure 2: Apprentissage de la distribution d'importance optimale pour l'estimation de la probabilité d'exercice p

(ix) Construire par convolution de la distribution empirique pondérée obtenue à la question (iv) avec un noyau régularisant, une seconde approximation de la distribution d'importance optimale μ_n et générer un M–échantillon distribué selon l'approximation régularisée. Avec l'échantillon obtenu, calculer une seconde approximation de la probabilité d'exercice p et du prix non–actualisé P_0. On utilisera une densité gaussienne réduite centrée pour la famille de noyaux régularisants, et on prendra la valeur numérique $h = 0.1$ pour la largeur de la fenêtre. On représentera la densité obtenue par régularisation, comme à la Figure 3 (en bleu).

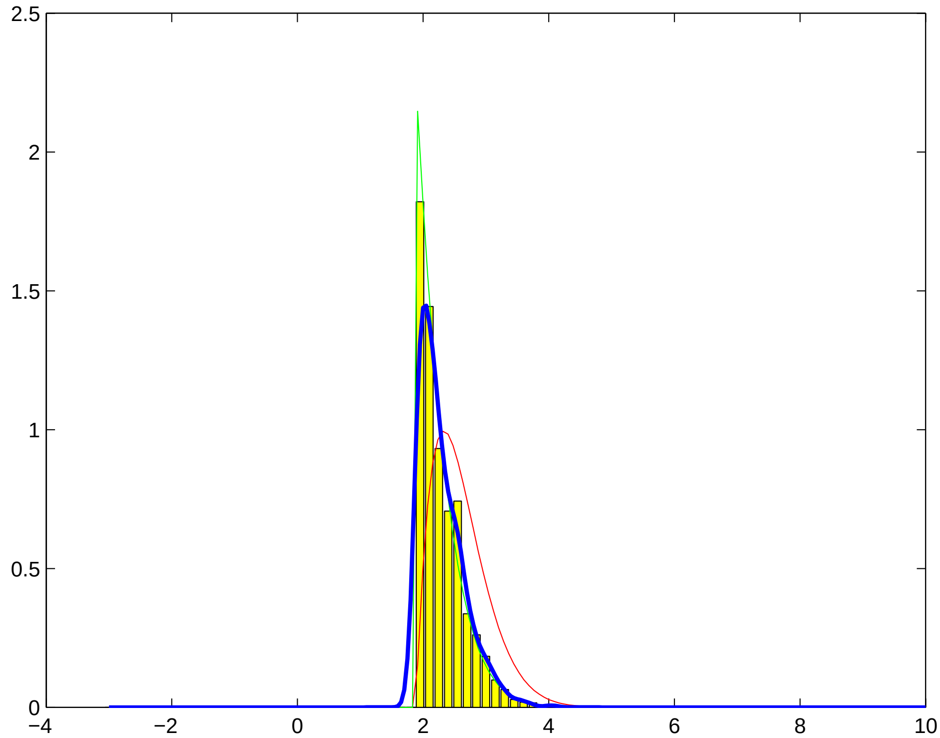

Figure 3: Approximation régularisée de la densité d'importance optimale pour l'estimation de la probabilité d'exercice p

Estimation du prix P de l'option : La distribution d'importance utilisée ci–dessus est optimale pour l'estimation de la probabilité d'exercice p, mais pas pour l'estimation du prix P de l'option : en revanche, la distribution d'importance

$$\mu_n^\sharp = f_n \cdot \eta = \frac{f_n \, \eta}{\langle \eta, f_n \rangle} \qquad \text{avec} \qquad f_n(x) = (V(x) - K)^+ \; ,$$

représentée Figure 1 (en rouge), est optimale pour l'estimation du prix P de l'option, et on suit l'approche proposée pour l'apprentissage de cette distribution d'importance optimale.

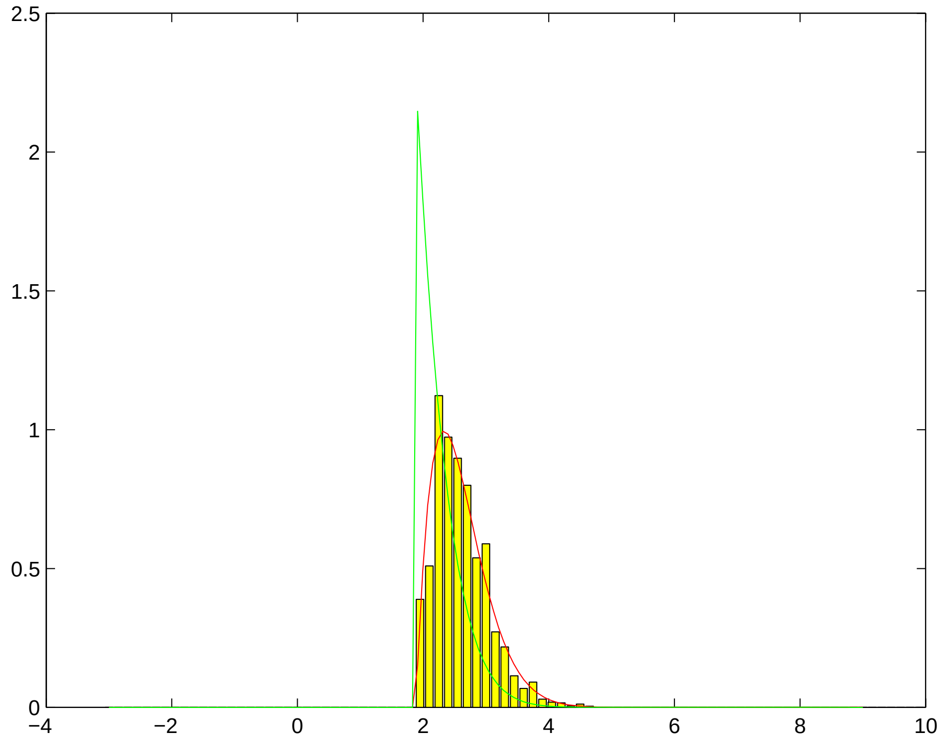

Figure 4: Apprentissage de la distribution d'importance optimale pour l'estimation du prix P de l'option

(x) Construire par convolution de la distribution empirique pondérée obtenue à la question (viii) avec un noyau régularisant, une seconde approximation de la distribution d'importance optimale $\mu_n^\sharp$ et générer un M–échantillon distribué selon l'approximation régularisée. Avec l'échantillon obtenu, calculer une seconde approximation du prix non–actualisé P_0, et donc du prix P de l'option. On utilisera une densité gaussienne réduite centrée pour la famille de noyaux régularisants, et on prendra la valeur numérique $h = 0.1$ pour la largeur de la fenêtre. On représentera la densité obtenue par régularisation, comme à la Figure 5 (en bleu).

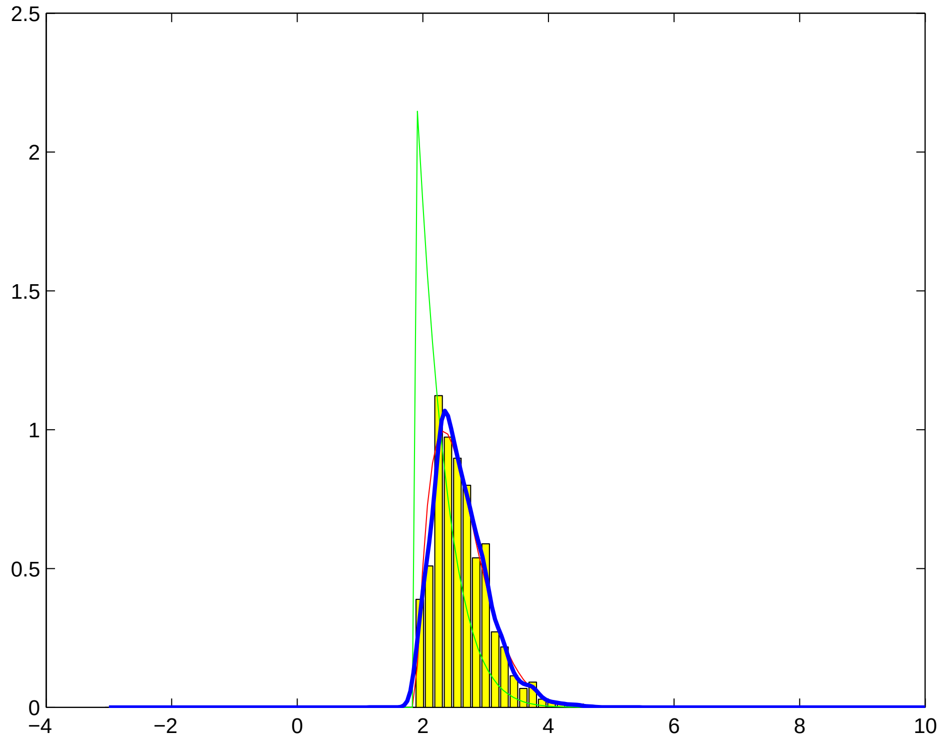

Figure 5: Approximation régularisée de la densité d'importance optimale pour l'estimation du prix P de l'option

On s'intéressera à la variance des estimateurs, dont une valeur approchée sera obtenue en répétant plusieurs simulations Monte Carlo indépendantes, et on vérifiera la réduction de variance apportée par le post–traitement mis en œuvre aux questions (ix) et (x), par rapport à la méthode mise en œuvre dans la première partie aux questions (iv) et (viii).