

École Nationale Supérieure de Techniques Avancées

filiale **Commande des Systèmes**, 2010–2011

lundi 11 octobre 2010

cours B7–1 (5/5)

**Filtrage Bayésien
et Approximation Particulaire**

François Le Gland

INRIA Rennes

<http://www.irisa.fr/aspi/legland/ensta/>

Théorèmes limites pour les approximations particulières

- distributions normalisées et non-normalisées
- erreur dans \mathbb{L}^p pour les approximations particulières
- TCL pour les tableaux triangulaires d'accroissement de martingales
- TCL pour les approximations particulières

évolution (non-linéaire) de la distribution normalisée

$$\mu_{k-1} \xrightarrow{\text{mutation}} \eta_k = \mu_{k-1} Q_k \xrightarrow{\text{pondération}} \mu_k = g_k \cdot \eta_k$$

avec la condition initiale $\mu_0 = g_0 \cdot \eta_0$, où la notation \cdot désigne le produit projectif
difficulté du problème mesurée par le rapport

$$r_k = \frac{\sup_{x \in E} g_k(x)}{\langle \eta_k, g_k \rangle} \geq 1$$

approximation particulière (éventuellement) pondérée

$$\eta_k \approx \eta_k^N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\xi_k^i} \quad \text{et} \quad \mu_k \approx \mu_k^N = \sum_{i=1}^N w_k^i \delta_{\xi_k^i}$$

avec la condition initiale $\mu_0^N = g_0 \cdot \eta_0^N$ et $\eta_0^N = S^N(\eta_0)$

immédiatement à partir de la définition

$$\mu_k^N = g_k \cdot \eta_k^N = \frac{\sum_{i=1}^N g_k(\xi_k^i) \delta_{\xi_k^i}}{\sum_{j=1}^N g_k(\xi_k^j)} = \sum_{i=1}^N w_k^i \delta_{\xi_k^i}$$

est automatiquement sous la forme recherchée, et

$$\langle \eta_k^N, g_k \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g_k(\xi_k^i)$$

en revanche

$$\mu_{k-1}^N Q_k = \sum_{i=1}^N w_{k-1}^i m_k^i \quad \text{avec} \quad m_k^i(dx') = Q_k(\xi_{k-1}^i, dx')$$

apparaît seulement sous la forme d'un mélange fini, et l'approximation

$$\eta_k^N \approx \mu_{k-1}^N Q_k$$

doit encore être précisée

évolution (linéaire) de la distribution non-normalisée

$$\gamma_k = \gamma_{k-1} R_k = g_k (\gamma_{k-1} Q_k) = g_k (\mu_{k-1} Q_k) \langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle = g_k \eta_k \langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle$$

avec la condition initiale $\gamma_0 = g_0 \eta_0$: clairement

$$\langle \gamma_k, 1 \rangle = \langle \eta_k, g_k \rangle \langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle \quad \text{et} \quad \langle \gamma_0, 1 \rangle = \langle \eta_0, g_0 \rangle \quad (\star)$$

approximation particulière

$$\gamma_k^N = g_k \eta_k^N \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle$$

avec la condition initiale $\gamma_0^N = g_0 \eta_0^N$ et $\eta_0^N = S^N(\eta_0)$: clairement

$$\langle \gamma_k^N, 1 \rangle = \langle \eta_k^N, g_k \rangle \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle \quad \text{et} \quad \langle \gamma_0^N, 1 \rangle = \langle \eta_0^N, g_0 \rangle \quad (\star\star)$$

d'où on déduit que

$$\frac{\gamma_k^N}{\langle \gamma_k^N, 1 \rangle} = g_k \cdot \eta_k^N = \mu_k^N \quad \text{et} \quad \frac{\gamma_0^N}{\langle \gamma_0^N, 1 \rangle} = g_0 \cdot \eta_0^N = \mu_0^N$$

en itérant les relations (\star) et $(\star\star)$, on obtient

$$\langle \gamma_n, 1 \rangle = \prod_{k=0}^n \langle \eta_k, g_k \rangle \quad \text{et} \quad \langle \gamma_n^N, 1 \rangle = \prod_{k=0}^n \langle \eta_k^N, g_k \rangle$$

_____ erreur dans \mathbb{L}^p pour les approximations particulières

Théorème pour la constante de normalisation et pour la distribution normalisée

$$\mathbb{E} \left| \frac{\langle \gamma_n^N, 1 \rangle}{\langle \gamma_n, 1 \rangle} - 1 \right| \leq z_n^N \quad \text{et} \quad \sup_{\phi: \|\phi\|=1} \mathbb{E} | \langle \mu_n^N - \mu_n, \phi \rangle | \leq 2 z_n^N$$

où la suite $\{z_k^N\}$ vérifie la récurrence linéaire

$$z_k^N \leq r_k \left(1 + \frac{1}{\sqrt{N}} \right) z_{k-1}^N + \frac{r_k}{\sqrt{N}} \quad \text{et} \quad z_0^N \leq \frac{r_0}{\sqrt{N}}$$

estimations similaires dans \mathbb{L}^p pour tout $p \geq 1$ (en utilisant les inégalités de Marcinkiewicz–Zygmund)

Remarque pour toute fonction ϕ mesurable bornée

$$\langle \mu_n^N - \mu_n, \phi \rangle = \frac{\langle \gamma_n^N, \phi \rangle}{\langle \gamma_n^N, 1 \rangle} - \frac{\langle \gamma_n, \phi \rangle}{\langle \gamma_n, 1 \rangle} = \frac{\langle \gamma_n^N - \gamma_n, \phi \rangle}{\langle \gamma_n, 1 \rangle} - \langle \mu_n^N, \phi \rangle \frac{\langle \gamma_n^N - \gamma_n, 1 \rangle}{\langle \gamma_n, 1 \rangle}$$

de sorte que

$$|\langle \mu_n^N - \mu_n, \phi \rangle| \leq \left| \frac{\langle \gamma_n^N - \gamma_n, \phi \rangle}{\langle \gamma_n, 1 \rangle} \right| + \|\phi\| \left| \frac{\langle \gamma_n^N - \gamma_n, 1 \rangle}{\langle \gamma_n, 1 \rangle} \right|$$

ce qui montre que

$$\sup_{\phi: \|\phi\|=1} \mathbb{E} |\langle \mu_n^N - \mu_n, \phi \rangle| \leq 2 \sup_{\phi: \|\phi\|=1} \mathbb{E} \left| \frac{\langle \gamma_n^N - \gamma_n, \phi \rangle}{\langle \gamma_n, 1 \rangle} \right|$$

et pour démontrer le Théorème il suffit donc de prouver que la suite définie par

$$z_k^N = \sup_{\phi: \|\phi\|=1} \mathbb{E} \left| \frac{\langle \gamma_k^N - \gamma_k, \phi \rangle}{\langle \gamma_k, 1 \rangle} \right|$$

pour tout $k = 0, 1 \dots n$ vérifie la relation de récurrence linéaire

Preuve du Théorème on rappelle que

$$\mathbb{E} | \langle \eta_0^N - \eta_0, \phi \rangle | \leq \frac{1}{\sqrt{N}} \|\phi\|$$

► pour $k = 0$, on a

$$\langle \gamma_0^N - \gamma_0, \phi \rangle = \langle \eta_0^N - \eta_0, g_0 \phi \rangle$$

pour toute fonction ϕ mesurable bornée, on remarque que

$$\mathbb{E} | \langle \eta_0^N - \eta_0, g_0 \phi \rangle | \leq \frac{1}{\sqrt{N}} \sup_{x \in E} g_0(x) \|\phi\|$$

et en divisant par $\langle \gamma_0, 1 \rangle = \langle \eta_0, g_0 \rangle$ on obtient

$$z_0^N = \sup_{\phi: \|\phi\|=1} \mathbb{E} \left| \frac{\langle \gamma_0^N - \gamma_0, \phi \rangle}{\langle \gamma_0, 1 \rangle} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{\sup_{x \in E} g_0(x)}{\langle \eta_0, g_0 \rangle} = \frac{r_0}{\sqrt{N}}$$

on rappelle que

$$\mathbb{E}[|\langle \eta_k^N - \mu_{k-1}^N Q_k, \phi \rangle| | \mathcal{H}_{k-1}^N] \leq \frac{1}{\sqrt{N}} \|\phi\|$$

où \mathcal{H}_{k-1}^N dénote la tribu engendrée par tous les systèmes de particules jusqu'à la $(k-1)$ -ème génération

► pour tout $k = 1 \dots n$, on a

$$\begin{aligned} \gamma_k^N - \gamma_k &= g_k \eta_k^N \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle - g_k (\gamma_{k-1} Q_k) \\ &= g_k (\gamma_{k-1}^N Q_k - \gamma_{k-1} Q_k) + g_k (\eta_k^N - \mu_{k-1}^N Q_k) \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle \end{aligned}$$

de sorte que

$$\langle \gamma_k^N - \gamma_k, \phi \rangle = \langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1}, Q_k(g_k \phi) \rangle + \langle \eta_k^N - \mu_{k-1}^N Q_k, g_k \phi \rangle \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle$$

pour toute fonction ϕ mesurable bornée

on en déduit que

$$\begin{aligned} & \sup_{\phi: \|\phi\|=1} \mathbb{E} | \langle \gamma_k^N - \gamma_k, \phi \rangle | \\ & \leq \sup_{\phi: \|\phi\|=1} \mathbb{E} | \langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1}, Q_k(g_k \phi) \rangle | \\ & \quad + \sup_{\phi: \|\phi\|=1} \mathbb{E} [| \langle \eta_k^N - \mu_{k-1}^N Q_k, g_k \phi \rangle | \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle] \end{aligned}$$

on remarque que

$$\begin{aligned} & \sup_{\phi: \|\phi\|=1} \mathbb{E} | \langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1}, Q_k(g_k \phi) \rangle | \\ & \leq \sup_{x \in E} g_k(x) \sup_{\phi: \|\phi\|=1} \mathbb{E} | \langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1}, \phi \rangle | \end{aligned}$$

compte tenu que

$$|Q_k(g_k \phi)(x)| = \left| \int_E Q_k(x, dx') g_k(x') \phi(x') \right| \leq \sup_{x \in E} g_k(x) \|\phi\|$$

et en divisant par $\langle \gamma_k, 1 \rangle = \langle \eta_k, g_k \rangle \langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle$ on obtient

$$\begin{aligned} z_k^N &= \sup_{\phi: \|\phi\|=1} \mathbb{E} \left| \frac{\langle \gamma_k^N - \gamma_k, \phi \rangle}{\langle \gamma_k, 1 \rangle} \right| \\ &\leq \frac{\sup_{x \in E} g_k(x)}{\langle \eta_k, g_k \rangle} \sup_{\phi: \|\phi\|=1} \mathbb{E} \left| \frac{\langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1}, \phi \rangle}{\langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle} \right| \\ &\quad + \sup_{\phi: \|\phi\|=1} \mathbb{E} \left| \frac{\langle \eta_k^N - \mu_{k-1}^N Q_k, g_k \phi \rangle \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle}{\langle \eta_k, g_k \rangle \langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle} \right| \end{aligned}$$

i.e.

$$z_k^N \leq r_k z_{k-1}^N + \varepsilon_k^N \quad (\bullet)$$

avec l'erreur locale définie par

$$\varepsilon_k^N = \sup_{\phi: \|\phi\|=1} \mathbb{E} \left| \frac{\langle \eta_k^N - \mu_{k-1}^N Q_k, g_k \phi \rangle \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle}{\langle \eta_k, g_k \rangle \langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle} \right|$$

comme terme forçant

on remarque que

$$\mathbb{E}[|\langle \eta_k^N - \mu_{k-1}^N Q_k, g_k \phi \rangle| | \mathcal{H}_{k-1}^N] \leq \frac{1}{\sqrt{N}} \sup_{x \in E} g_k(x) \|\phi\|$$

où \mathcal{H}_{k-1}^N dénote la tribu engendrée par le système de particules jusqu'à la $(k-1)$ -ème génération, puis

- en multipliant par $\langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle$ mesurable par rapport à \mathcal{H}_{k-1}^N
- et en divisant par $\langle \eta_k, g_k \rangle \langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle$

on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\left| \frac{\langle \eta_k^N - \mu_{k-1}^N Q_k, g_k \phi \rangle \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle}{\langle \eta_k, g_k \rangle \langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle} \right| \middle| \mathcal{H}_{k-1}^N \right] \\ \leq \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{\sup_{x \in E} g_k(x)}{\langle \eta_k, g_k \rangle} \frac{\langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle}{\langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle} \|\phi\| \\ \leq \frac{1}{\sqrt{N}} r_k \left(1 + \left| \frac{\langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1}, 1 \rangle}{\langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle} \right| \right) \|\phi\| \end{aligned}$$

on en déduit que

$$\begin{aligned} \varepsilon_k^N &= \sup_{\phi: \|\phi\|=1} \mathbb{E} \left| \frac{\langle \eta_k^N - \mu_{k-1}^N Q_k, g_k \phi \rangle \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle}{\langle \eta_k, g_k \rangle \langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle} \right| \\ &\leq \frac{r_k}{\sqrt{N}} \left(1 + \mathbb{E} \left| \frac{\langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1}, 1 \rangle}{\langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle} \right| \right) \leq \frac{r_k}{\sqrt{N}} (1 + z_{k-1}^N) \end{aligned}$$

et en reportant cette estimation dans (\bullet) on obtient

$$z_k^N \leq r_k \left(1 + \frac{1}{\sqrt{N}} \right) z_{k-1}^N + \frac{r_k}{\sqrt{N}} \quad \square$$

rappel : convergence en distribution

soit X_N et X des v.a. à valeurs dans \mathbb{R}^m : on dit que $X_N \Rightarrow X$ en distribution quand $N \uparrow \infty$ ssi

$$\mathbb{E}[f(X_N)] \longrightarrow \mathbb{E}[f(X)] \quad \text{pour toute fonction } f \text{ continue et bornée}$$

une CNS est la convergence ponctuelle des fonctions caractéristiques, c-à-d

$$\mathbb{E}[\exp\{i u^* X_N\}] \longrightarrow \mathbb{E}[\exp\{i u^* X\}] \quad \text{pour tout vecteur } u \in \mathbb{R}^m$$

Lemme de Slutsky

soit X_N, Y_N et X des v.a. à valeurs dans \mathbb{R}^m : si

- $X_N \Rightarrow X$ en distribution quand $N \uparrow \infty$
- $|Y_N - X_N| \rightarrow 0$ en probabilité quand $N \uparrow \infty$

alors

$$Y_N \Rightarrow X \text{ en distribution quand } N \uparrow \infty$$

TCL pour les tableaux triangulaires

pour tout $N \geq 1$, soit $\mathcal{F}^N = \{\mathcal{F}_k^N, k = 1 \cdots K_N\}$ une suite croissante de tribus, et soit $X^N = \{X_k^N, k = 1 \cdots K_N\}$ une suite adaptée à \mathcal{F}^N (c'est-à-dire que la v.a. X_k^N est mesurable par rapport à \mathcal{F}_k^N , pour tout $k = 1 \cdots K_N$)

Théorème si

$$\mathbb{E}[X_k^N \mid \mathcal{F}_{k-1}^N] = 0$$

pour tout $N \geq 1$ et pour tout $k = 1 \cdots K_N$, si

$$V_N = \sum_{k=1}^{K_N} \mathbb{E}[|X_k^N|^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}^N] \longrightarrow V$$

en probabilité quand $N \uparrow \infty$, et si pour tout $\varepsilon > 0$

$$F_N(\varepsilon) = \sum_{k=1}^{K_N} \mathbb{E}[1_{(|X_k^N| > \varepsilon)} |X_k^N|^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}^N] \longrightarrow 0$$

en probabilité quand $N \uparrow \infty$

alors

$$S_N = \sum_{k=1}^{K_N} X_k^N \implies \mathcal{N}(0, V)$$

en distribution quand $N \uparrow \infty$

Remarque si pour un certain $d > 0$

$$Y_N = \sum_{k=1}^{K_N} \mathbb{E}[|X_k^N|^{2+d} \mid \mathcal{F}_{k-1}^N] \longrightarrow 0$$

en probabilité quand $N \uparrow \infty$, alors la condition de Lindeberg est satisfaite

$$|x|^{2+d} = |x|^{2+d} \mathbf{1}_{(|x| \leq \varepsilon)} + |x|^{2+d} \mathbf{1}_{(|x| > \varepsilon)} \geq \varepsilon^d |x|^2 \mathbf{1}_{(|x| > \varepsilon)}$$

pour tout nombre réel x et pour tout $\varepsilon > 0$, de sorte que

$$F_N(\varepsilon) = \sum_{k=1}^{K_N} \mathbb{E}[\mathbf{1}_{(|X_k^N| > \varepsilon)} |X_k^N|^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}^N] \leq \frac{1}{\varepsilon^d} \sum_{k=1}^{K_N} \mathbb{E}[|X_k^N|^{2+d} \mid \mathcal{F}_{k-1}^N] \longrightarrow 0$$

en probabilité quand $N \uparrow \infty$

TCL pour les approximations particulières

on se limite ici au cas de la redistribution multinomiale, c-à-d

$$\eta_k^N = S^N(\mu_{k-1}^N Q_k) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\xi_k^i}$$

où, conditionnellement à la tribu \mathcal{H}_{k-1}^N engendrée par le système de particules jusqu'à la $(k-1)$ -ème génération, les v.a. $(\xi_k^1, \dots, \xi_k^N)$ sont i.i.d. de distribution de probabilité (mélange fini)

$$\mu_{k-1}^N Q_k(dx') = \sum_{i=1}^N w_{k-1}^i Q_k(\xi_{k-1}^i, dx')$$

on rappelle que dans ce cas

$$\mathbb{E}\left[\left|\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \phi(\xi_k^i) - \langle \mu_{k-1}^N Q_k, \phi \rangle\right|^2 \mid \mathcal{H}_{k-1}^N\right] = \frac{1}{N} \text{var}(\phi, \mu_{k-1}^N Q_k)$$

Théorème pour la constante de normalisation et pour la distribution normalisée

$$\sqrt{N} \left[\frac{\langle \gamma_n^N, 1 \rangle}{\langle \gamma_n, 1 \rangle} - 1 \right] \implies \mathcal{N}(0, V_n) \quad \text{et} \quad \sqrt{N} \langle \mu_n^N - \mu_n, \phi \rangle \implies \mathcal{N}(0, v_n(\phi))$$

en distribution quand $N \uparrow \infty$, avec la variance asymptotique définie par

$$V_n = \sum_{k=0}^n \left[\frac{\langle \eta_k, (g_k R_{k+1:n} 1)^2 \rangle}{\langle \eta_k, g_k R_{k+1:n} 1 \rangle^2} - 1 \right]$$

$$v_n(\phi) = \sum_{k=0}^n \frac{\langle \eta_k, |g_k R_{k+1:n} (\phi - \langle \mu_n, \phi \rangle)|^2 \rangle}{\langle \eta_k, g_k R_{k+1:n} 1 \rangle^2}$$

respectivement, où

$$R_{k+1:n} \phi(x) = R_{k+1} \cdots R_n \phi(x) = \mathbb{E}[\phi(X_n) \prod_{p=k+1}^n g_p(X_p) \mid X_k = x]$$

pour tout $k = 0, 1 \cdots n$, avec la convention $R_{n+1:n} \phi(x) = \phi(x)$

Remarque pour démontrer le Théorème, il suffit de démontrer que

$$\sqrt{N} \frac{\langle \gamma_n^N - \gamma_n, \phi \rangle}{\langle \gamma_n, 1 \rangle} \implies \mathcal{N}(0, V_n(\phi))$$

en distribution quand $N \uparrow \infty$, avec la variance asymptotique définie par

$$V_n(\phi) \langle \gamma_n, 1 \rangle^2 = \text{var}(g_0 R_{1:n} \phi, \eta_0) + \sum_{k=1}^n \text{var}(g_k R_{k+1:n} \phi, \eta_k) \langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle^2 \quad (\circ)$$

ou de manière équivalente par

$$V_n(\phi) = \sum_{k=0}^n \frac{\text{var}(g_k R_{k+1:n} \phi, \eta_k)}{\langle \eta_k, g_k R_{k+1:n} 1 \rangle^2}$$

compte tenu que

$$\langle \gamma_n, 1 \rangle = \langle \gamma_0 R_{1:n}, 1 \rangle = \langle \eta_0, g_0 R_{1:n} 1 \rangle$$

pour $k = 0$, et que

$$\langle \gamma_n, 1 \rangle = \langle \gamma_{k-1} R_{k:n}, 1 \rangle = \langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle \langle \eta_k, g_k R_{k+1:n} 1 \rangle$$

pour tout $k = 1 \cdots n$

on remarque d'abord que

$$V_n = V_n(1) = \sum_{k=0}^n \frac{\text{var}(g_k R_{k+1:n} 1, \eta_k)}{\langle \eta_k, g_k R_{k+1:n} 1 \rangle^2} = \sum_{k=0}^n \left[\frac{\langle \eta_k, (g_k R_{k+1:n} 1)^2 \rangle}{\langle \eta_k, g_k R_{k+1:n} 1 \rangle^2} - 1 \right]$$

ce qui montre le Théorème pour la constante de normalisation

on remarque aussi que

$$\langle \mu_n^N - \mu_n, \phi \rangle = \left\langle \frac{\gamma_n^N}{\langle \gamma_n^N, 1 \rangle}, \phi - \langle \mu_n, \phi \rangle \right\rangle = \frac{\langle \gamma_n, 1 \rangle}{\langle \gamma_n^N, 1 \rangle} \left\langle \frac{\gamma_n^N - \gamma_n}{\langle \gamma_n, 1 \rangle}, \phi - \langle \mu_n, \phi \rangle \right\rangle$$

pour toute fonction mesurable bornée ϕ , et que $\langle \gamma_n^N, 1 \rangle \longrightarrow \langle \gamma_n, 1 \rangle$ en probabilité quand $N \uparrow \infty$, ce qui montre le Théorème pour la distribution normalisée (en utilisant le lemme de Slutsky), avec

$$v_n(\phi) = V_n(\phi - \langle \mu_n, \phi \rangle) = \sum_{k=0}^n \frac{\text{var}(g_k R_{k+1:n} (\phi - \langle \mu_n, \phi \rangle), \eta_k)}{\langle \eta_k, g_k R_{k+1:n} 1 \rangle^2}$$

on remarque finalement que

$$\text{var}(g_k R_{k+1:n} (\phi - \langle \mu_n, \phi \rangle), \eta_k) = \langle \eta_k, |g_k R_{k+1:n} (\phi - \langle \mu_n, \phi \rangle)|^2 \rangle$$

pour tout $k = 0, 1 \dots n$, compte tenu que

$$\langle \eta_0, g_0 R_{1:n} (\phi - \langle \mu_n, \phi \rangle) \rangle = \langle \gamma_0 R_{1:n}, \phi - \langle \mu_n, \phi \rangle \rangle = \langle \gamma_n, \phi - \langle \mu_n, \phi \rangle \rangle = 0$$

pour $k = 0$, et que

$$\langle \eta_k, g_k R_{k+1:n} (\phi - \langle \mu_n, \phi \rangle) \rangle = \langle \mu_{k-1} R_{k:n}, \phi - \langle \mu_n, \phi \rangle \rangle = \frac{\langle \gamma_n, \phi - \langle \mu_n, \phi \rangle \rangle}{\langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle} = 0$$

pour tout $k = 1 \dots n$

Remarque le vecteur aléatoire

$$(\sqrt{N} \left[\frac{\langle \gamma_n^N, 1 \rangle}{\langle \gamma_n, 1 \rangle} - 1 \right], \sqrt{N} \langle \mu_n^N - \mu_n, \phi_1 \rangle, \dots, \sqrt{N} \langle \mu_n^N - \mu_n, \phi_d \rangle)$$

converge conjointement en distribution quand $N \uparrow \infty$ vers une limite gaussienne, pour toutes fonctions mesurables bornées ϕ_1, \dots, ϕ_d (en utilisant le procédé de Cramér–Wold)

Preuve du Théorème pour toute fonction mesurable bornée ϕ , en utilisant une somme télescopique et la relation

$$\gamma_k^N = g_k \eta_k^N \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle$$

pour tout $k = 1 \cdots n$, on obtient la décomposition suivante

$$\begin{aligned} \langle \gamma_n^N - \gamma_n, \phi \rangle &= \sum_{k=1}^n \langle \gamma_k^N - \gamma_{k-1}^N R_k, R_{k+1:n} \phi \rangle + \langle \gamma_0^N - \gamma_0, R_{1:n} \phi \rangle \\ &= \sum_{k=1}^n \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle \langle g_k (\eta_k^N - \mu_{k-1}^N Q_k), R_{k+1:n} \phi \rangle + \langle g_0 (\eta_0^N - \eta_0), R_{1:n} \phi \rangle \\ &= \sum_{k=1}^n \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle \langle \eta_k^N - \mu_{k-1}^N Q_k, f_k \rangle + \langle \eta_0^N - \eta_0, f_0 \rangle \end{aligned}$$

où les fonctions mesurables bornées f_0, f_1, \cdots, f_n sont définies par

$$f_k(x) = g_k(x) R_{k+1:n} \phi(x)$$

pour tout $k = 0, 1 \cdots n$, avec la convention $R_{n+1:n} \phi(x) = \phi(x)$

étape 1 (décomposition) ► pour $k = 0$, on remarque que

$$\langle \eta_0^N - \eta_0, f_0 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [f_0(\xi_0^i) - \langle \eta_0, f_0 \rangle] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N X_{0,i}^N$$

avec par définition

$$X_{0,i}^N = \frac{1}{\sqrt{N}} [f_0(\xi_0^i) - \langle \eta_0, f_0 \rangle]$$

pour tout $i = 1 \cdots N$, où les variables aléatoires $(\xi_0^1, \cdots, \xi_0^N)$ sont i.i.d. de distribution de probabilité η_0

► pour tout $k = 1 \cdots n$, on remarque que

$$\begin{aligned} \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle \langle \eta_k^N - \mu_{k-1}^N Q_k, f_k \rangle &= \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [f_k(\xi_k^i) - \langle \mu_{k-1}^N Q_k, f_k \rangle] \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N X_{k,i}^N \end{aligned}$$

avec par définition

$$X_{k,i}^N = \frac{\langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle}{\sqrt{N}} [f_k(\xi_k^i) - \langle \mu_{k-1}^N Q_k, f_k \rangle]$$

pour tout $i = 1 \cdots N$, où conditionnellement par rapport à la tribu \mathcal{H}_{k-1}^N engendrée par le système de particules jusqu'à la $(k-1)$ -ème génération, les variables aléatoires $(\xi_k^1, \dots, \xi_k^N)$ sont i.i.d. de distribution de probabilité $\mu_{k-1}^N Q_k$ en prenant la somme membre à membre pour $k = 0, 1 \cdots n$, il vient

$$\sqrt{N} \langle \gamma_n^N - \gamma_n, \phi \rangle = \sum_{k=0}^n \sum_{i=1}^N X_{k,i}^N = S_n^N$$

étape 2 (estimations a priori) ► pour $k = 0$ et pour tout $i = 1 \cdots N$, on définit la tribu $\mathcal{F}_{0,i}^N$ engendrée par les variables aléatoires $(\xi_0^1, \cdots, \xi_0^i)$, et on remarque que

$$\mathbb{E}[X_{0,i}^N \mid \mathcal{F}_{0,i-1}^N] = 0$$

et

$$\mathbb{E}[|X_{0,i}^N|^2 \mid \mathcal{F}_{0,i-1}^N] = \frac{1}{N} \text{var}(f_0, \eta_0) = V_{0,0}^N$$

avec la convention $\mathcal{F}_{0,0}^N = \{\emptyset, \Omega\}$, et

$$|X_{0,i}^N| \leq \frac{1}{\sqrt{N}} 2 \|f_0\|$$

de sorte que

$$\mathbb{E}[|X_{0,i}^N|^3 \mid \mathcal{F}_{0,i-1}^N] \leq \frac{1}{N\sqrt{N}} 8 \|f_0\|^3 = Y_{0,0}^N$$

► pour tout $k = 1 \cdots n$ et pour tout $i = 1 \cdots N$, on définit la tribu $\mathcal{F}_{k,i}^N$ engendrée par le système de particules jusqu'à la $(k-1)$ -ème génération et par les variables aléatoires $(\xi_k^1, \cdots, \xi_k^i)$, et on remarque que

$$\mathbb{E}[X_{k,i}^N \mid \mathcal{F}_{k,i-1}^N] = 0$$

et

$$\mathbb{E}[|X_{k,i}^N|^2 \mid \mathcal{F}_{k,i-1}^N] = \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle^2 \frac{1}{N} \text{var}(f_k, \mu_{k-1}^N Q_k) = V_{k,0}^N$$

où la variable aléatoire $V_{k,0}^N$ est mesurable par rapport à $\mathcal{H}_{k-1}^N = \mathcal{F}_{k,0}^N$, et

$$|X_{k,i}^N| \leq \frac{\langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle}{\sqrt{N}} 2 \|f_k\|$$

de sorte que

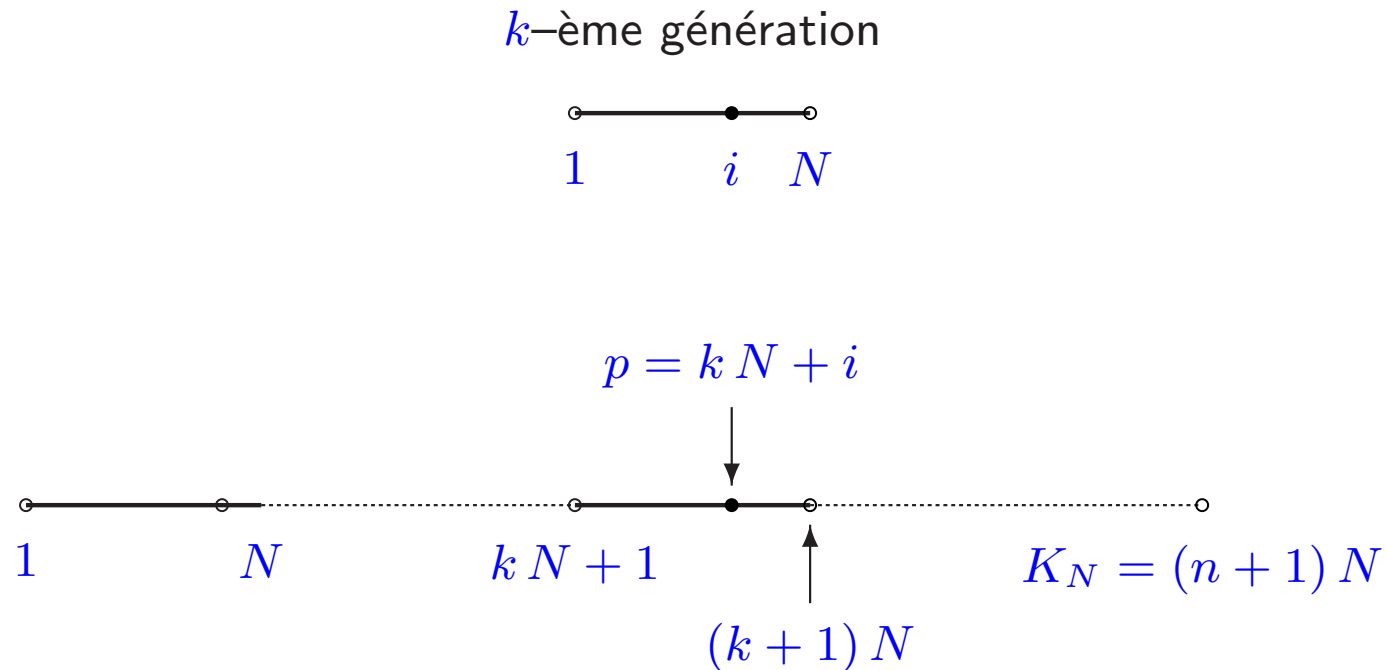
$$\mathbb{E}[|X_{k,i}^N|^3 \mid \mathcal{F}_{k,i-1}^N] \leq \frac{\langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle^3}{N\sqrt{N}} 8 \|f_k\|^3 = Y_{k,0}^N$$

où la variable aléatoire $Y_{k,0}^N$ est mesurable par rapport à $\mathcal{H}_{k-1}^N = \mathcal{F}_{k,0}^N$

étape 3 (ré-étiquetage) par définition

$$S_n^N = \sum_{k=0}^n \sum_{i=1}^N X_{k,i}^N$$

est écrit comme une somme double, sur les générations $k = 0, 1 \dots n$ et sur les individus $i = 1 \dots N$ au sein de chaque génération



au vu de la figure

l'individu i au sein de la k -ème génération (haut)

peut aussi être vu comme

l'individu p au sein de la population globale (bas)

associé de manière unique à un entier $p = kN + i$ compris entre 1 et

$$K_N = (n + 1)N$$

on ré-écrit donc S_n^N comme une somme unique, de façon à pouvoir utiliser le TCL pour les tableaux triangulaires d'accroissements de martingales : avec ce nouvel étiquetage

$$S_n^N = \sum_{k=0}^n \sum_{i=1}^N X_{k,i}^N = \sum_{p=1}^{K_N} U_p^N$$

où la variable aléatoire $U_p^N = X_{k,i}^N$ est mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{G}_p^N = \mathcal{F}_{k,i}^N$ pour tout $p = 1 \cdots K_N$ de la forme $p = kN + i$

étape 4 (vérification des conditions) (i) propriété d'accroissement de martingale : il résulte des estimations précédentes que pour tout $p = 1 \cdots K_N$

$$\mathbb{E}[U_p^N \mid \mathcal{G}_{p-1}^N] = 0$$

(ii) variance asymptotique : il résulte des estimations précédentes que pour tout $p = 1 \cdots K_N$ de la forme $p = kN + i$

$$\mathbb{E}[|U_p^N|^2 \mid \mathcal{G}_{p-1}^N] = V_{k,0}^N$$

de sorte que

$$\begin{aligned} V_n^N &= \sum_{p=1}^{K_N} \mathbb{E}[|U_p^N|^2 \mid \mathcal{G}_{p-1}^N] = \sum_{k=0}^n \sum_{p=kN+1}^{(k+1)N} \mathbb{E}[|U_p^N|^2 \mid \mathcal{G}_{p-1}^N] \\ &= N \sum_{k=0}^n V_{k,0}^N \\ &= \text{var}(f_0, \eta_0) + \sum_{k=1}^n \text{var}(f_k, \mu_{k-1}^N Q_k) \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle^2 \end{aligned}$$

compte tenu que $\langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle \rightarrow \langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle$ et $\text{var}(f_k, \mu_{k-1}^N Q_k) \rightarrow \text{var}(f_k, \eta_k)$ en probabilité quand $N \uparrow \infty$, pour tout $k = 1 \cdots n$, on a

$$\begin{aligned}
 V_n^N &\longrightarrow \text{var}(f_0, \eta_0) + \sum_{k=1}^n \text{var}(f_k, \eta_k) \langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle^2 \\
 &= \text{var}(g_0 R_{1:n} \phi, \eta_0) + \sum_{k=1}^n \text{var}(g_k R_{k+1:n} \phi, \eta_k) \langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle^2 \\
 &= V_n(\phi) \langle \gamma_n, 1 \rangle^2
 \end{aligned}$$

en probabilité quand $N \uparrow \infty$, avec la définition (\circ)

(iii) condition de Lindeberg conditionnelle : il résulte des estimations précédentes que pour tout $p = 1 \cdots K_N$ de la forme $p = kN + i$

$$\mathbb{E}[|U_p^N|^3 \mid \mathcal{G}_{p-1}^N] = Y_{k,0}^N$$

de sorte que

$$\begin{aligned} Y_n^N &= \sum_{p=1}^{K_N} \mathbb{E}[|U_p^N|^3 \mid \mathcal{G}_{p-1}^N] = \sum_{k=0}^n \sum_{p=kN+1}^{(k+1)N} \mathbb{E}[|U_p^N|^3 \mid \mathcal{G}_{p-1}^N] \\ &= N \sum_{k=0}^n Y_{k,0}^N \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{N}} \delta \left[\|f_0\|^3 + \sum_{k=1}^n \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle^3 \|f_k\|^3 \right] \end{aligned}$$

compte tenu que $\langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle \rightarrow \langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle$ en probabilité quand $N \uparrow \infty$, pour tout $k = 1 \cdots n$, on a $Y_n^N \rightarrow 0$ en probabilité quand $N \uparrow \infty$

étape finale les conditions du TCL pour les accroissements de martingales sont donc vérifiées et on en déduit que

$$S_n^N = \sqrt{N} \langle \gamma_n^N - \gamma_n, \phi \rangle \longrightarrow \mathcal{N}(0, V_n(\phi) \langle \gamma_n, 1 \rangle^2)$$

ou de manière équivalente

$$\sqrt{N} \frac{\langle \gamma_n^N - \gamma_n, \phi \rangle}{\langle \gamma_n, 1 \rangle} \longrightarrow \mathcal{N}(0, V_n(\phi))$$

avec l'expression donnée en (○) pour la variance asymptotique, ce qui suffit pour conclure au vu de la Remarque initiale □