

## B7–3 : Filtrage bayésien et approximation particulière

### TP 3 : Options européennes dans le modèle de Black–Scholes

lundi 29 septembre et lundi 13 octobre 2008

Une option européenne est définie comme le droit, qu'il n'est pas obligatoire d'exercer, d'acheter une quantité unitaire d'un actif à la date  $T$  et au prix  $K$ , la date d'exercice ou de maturité  $T$  et le prix d'exercice (strike)  $K$  étant fixés par contrat. La question se pose de déterminer le prix auquel une telle action doit être proposé. Dans le modèle de Black–Scholes, le prix unitaire  $S_t$  de l'actif à l'instant  $t$  est modélisé comme un mouvement brownien géométrique (exponentielle d'un mouvement brownien avec dérive)

$$dS_t = S_t (r dt + \sigma dW_t) ,$$

dont la solution explicite est donné par la formule

$$S_t = S_0 \exp\left\{(r - \frac{1}{2} \sigma^2) t + \sigma W_t\right\} .$$

La probabilité d'exercice est définie par

$$p = \mathbb{P}[S_T \geq K] = \mathbb{P}[S_0 \exp((r - \frac{1}{2} \sigma^2) T + \sigma \sqrt{T} X) \geq K] , \quad (1)$$

et on admettra que le prix de l'option à l'instant 0 est donné par la formule

$$P = e^{-rT} \mathbb{E}(S_T - K)^+ = e^{-rT} \mathbb{E}(S_0 \exp\{(r - \frac{1}{2} \sigma^2) T\} \exp\{\sigma \sqrt{T} X\} - K)^+ , \quad (2)$$

où  $X$  est variable aléatoire gaussienne réduite centrée, de distribution de probabilité

$$\mu(dx) = \mathbb{P}[X \in dx] = q(x) dx \quad \text{avec la densité} \quad q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} x^2} .$$

Dans ce cas particulier très simple, il existe une expression explicite

$$P = S_0 N\left(\frac{\log \frac{S_0}{K} + (r + \frac{1}{2} \sigma^2) T}{\sigma \sqrt{T}}\right) - e^{-rT} K N\left(\frac{\log \frac{S_0}{K} + (r - \frac{1}{2} \sigma^2) T}{\sigma \sqrt{T}}\right) ,$$

où par définition

$$N(d) = \mu([-d, \infty)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} x^2} dx ,$$

et on pourra utiliser la fonction MATLAB `erfc` pour calculer la valeur exacte de la probabilité d'exercice  $p$  et du prix  $P$  de l'option. Par exemple, pour  $S_0 = 70$ ,  $K = 100, 120, 140$ ,  $T = 1$ ,  $r = 0$  et  $\sigma = 0.2$ , on a

	$K = 100$	$K = 120$	$K = 140$
$p$	0.0298	0.00259	0.000181
$P$	0.2481	0.01967	0.001320

L'objectif ici est de calculer numériquement la probabilité d'exercice  $p$  et le prix  $P$  de l'option en utilisant des méthodes de simulation Monte Carlo. En posant

$$V(x) = S_0 \exp\left(\left(r - \frac{1}{2} \sigma^2\right) T + \sigma \sqrt{T} x\right),$$

on voit qu'il s'agit, pour un niveau  $K$  donné, d'évaluer les quantités

$$p = \mathbb{P}[V(X) \geq K] \quad \text{et} \quad P_0 = e^{rT} P = \mathbb{E}(V(X) - K)^+,$$

c'est-à-dire qu'il s'agit de calculer des intégrales (ou des espérances mathématiques) dans la queue d'une distribution de probabilité gaussienne, compte tenu que

$$V(x) \geq K \quad \text{si et seulement si} \quad x \geq \frac{1}{\sigma \sqrt{T}} \left(\log \frac{K}{S_0} - \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2\right) T\right).$$

### PRÉLIMINAIRES

(i) Montrer que le noyau de probabilités de transition

$$M(x, dx') = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-c^2)}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{(x' - cx)^2}{1-c^2}\right\} dx', \quad \text{avec } |c| < 1,$$

est réversible pour la distribution de probabilité  $\mu$ , c'est-à-dire que

$$\mu(dx) M(x, dx') = \mu(dx') M(x', dx).$$

(ii) Montrer que pour simuler une variable aléatoire  $\Xi$  distribuée selon  $M(x, dx')$ , où  $x \in E$  est fixé, il suffit de simuler une variable aléatoire gaussienne  $W$  centrée réduite (variance égale à 1), et de poser  $\Xi = cx + \sqrt{1-c^2} W$ . On utilisera dans la suite la valeur numérique  $c = 0.9$ .

### PREMIÈRE MÉTHODE : NIVEAUX INTERMÉDIAIRES

On introduit une suite croissante

$$S_0 = a_0 < \dots < a_k < \dots < a_n = K,$$

de niveaux intermédiaires entre le prix  $S_0$  de l'actif à l'instant 0 et le prix d'exercice  $K$ , et pour tout  $k = 1, \dots, n$  on considère la distribution de probabilité

$$\mu_k = g_k \cdot \mu = \frac{g_k \mu}{\langle \mu, g_k \rangle},$$

où par définition  $g_k(x) = 1_{(V(x) \geq a_k)}$ , c'est-à-dire que

$$\mu_k(dx) = \mathbb{P}[X \in dx \mid V(X) \geq a_k] \quad \text{et} \quad P_k = \langle \mu, g_k \rangle = \mathbb{P}[V(X) \geq a_k].$$

On va donc dans cette partie

- estimer la probabilité d'exercice

$$p = \mathbb{P}[V(X) \geq K] = \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x) \mu(dx) ,$$

- générer un échantillon distribué (approximativement) selon la loi conditionnelle

$$\mu_n(dx) = \mathbb{P}[X \in dx \mid V(X) \geq K] \quad \text{c'est-à-dire} \quad \mu_n = g_n \cdot \mu = \frac{g_n \mu}{\langle \mu, g_n \rangle} ,$$

- et finalement calculer (approximativement) le prix

$$P_0 = \mathbb{E}(V(X) - K)^+ = \int_{-\infty}^{\infty} (V(x) - K)^+ \mu(dx) ,$$

grâce à la représentation

$$P_0 = \int_{-\infty}^{\infty} (V(x) - K)^+ g_n(x) \mu(dx) = p \int_{-\infty}^{\infty} (V(x) - K)^+ \mu_n(dx) .$$

On rappelle que

$$\mu_k = g_k \cdot \mu = g_k \cdot \mu_{k-1} \quad \text{compte tenu que} \quad g_k = g_k g_{k-1} ,$$

que le noyau markovien

$$\begin{aligned} M_{k-1}(x, dx') &= M(x, dx') g_{k-1}(x') + [1 - (M g_{k-1})(x)] \delta_x(dx') \\ &= M(x, dx') 1_{(V(x') \geq a_{k-1})} + [1 - M(x, V^{-1}([a_{k-1}, \infty)))] \delta_x(dx') , \end{aligned}$$

laisse la distribution de probabilité  $\mu_{k-1}$  invariante, et que pour simuler une variable aléatoire  $X$  distribuée selon  $M_{k-1}(x, dx')$ , où  $x \in E$  est fixé, il suffit de générer une variable aléatoire  $\Xi$  distribuée selon  $M(x, dx')$  — voir ci-dessus — et de poser ensuite :  $X = \Xi$ , si  $V(\Xi) \geq a_{k-1}$ , et  $X = x$  sinon.

- (iii) Mettre en œuvre l'algorithme SIR pour estimer la probabilité d'exercice  $p$ , pour générer un échantillon distribué (approximativement) selon la distribution de probabilité conditionnelle  $\mu_n(dx)$ , et pour calculer (approximativement) la quantité  $P_0 = e^{rT} P$ , d'où le prix  $P$  de l'option. On utilisera des niveaux régulièrement espacés entre le prix  $S_0$  de l'actif à l'instant 0 et le prix d'exercice  $K$ . On pourra par exemple représenter à l'aide d'un histogramme les approximations particulières associées aux niveaux intermédiaires.

Au-delà du calcul approché de la probabilité d'exercice  $p$  et du prix  $P$  de l'option, on s'intéressera à la variance de l'erreur d'estimation, dont une valeur approchée sera obtenue en répétant plusieurs simulations de Monte Carlo indépendantes.

On rappelle que le calcul de l'intégrale (ou de l'espérance mathématique)

$$I = \mathbb{E}[h_n(X)] = \langle \mu, h_n \rangle = \int_{\mathbb{R}} h_n(x) \mu(dx) ,$$

peut s'exprimer en terme de la distribution non-normalisée

$$\langle \gamma_n, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} \gamma_0(dx_0) R_1(x_0, dx_1) \cdots R_n(x_{n-1}, dx_n) \phi(x_n) = \langle \mu, h_n \phi \rangle ,$$

avec

$$\gamma_0(dx) = \mu(dx) h_0(x) \quad \text{et} \quad R_k(x, dx') = \frac{1}{h_{k-1}(x)} M(x, dx') h_k(x') ,$$

pour une suite arbitraire  $h_0, h_1, \dots, h_{n-1}$  de fonctions strictement positives. En effet, la distribution normalisée associée vérifie

$$\langle \mu_n, \phi \rangle = \frac{\langle \gamma_n, \phi \rangle}{\langle \gamma_n, 1 \rangle} = \frac{\langle \mu, h_n \phi \rangle}{\langle \mu, h_n \rangle}$$

c'est-à-dire que  $\mu_n = h_n \cdot \mu$ , et en particulier pour  $\phi \equiv 1$

$$\langle \mu, h_n \rangle = \langle \gamma_n, 1 \rangle$$

de sorte que

- la constante de normalisation  $\langle \gamma_n, 1 \rangle$  fournit une autre expression de  $I$ ,
- la distribution normalisée  $\mu_n = h_n \cdot \mu$  est la distribution d'importance optimale pour le calcul de  $I$ .

En partant d'une approximation de la distribution d'importance optimale  $\mu_n = h_n \cdot \mu$  sous la forme d'une distribution empirique pondérée

$$\mu_n^N = \sum_{i=1}^N w_n^i \delta_{\xi_n^i} \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^N w_n^i = 1 ,$$

on peut construire une densité approchée par convolution avec un noyau régularisant, paramétrée par le nombre  $N$  de particules et par la largeur  $h$  de la fenêtre, c'est-à-dire

$$q_{N,h}(x) = \sum_{i=1}^N w_n^i K_h(x - \xi_n^i) ,$$

où on définit  $K_h(u) = h^{-1} K(h^{-1} u)$  pour tout  $h > 0$  à partir d'une densité de probabilité  $K(u)$  définie sur  $\mathbb{R}$ . En utilisant cette approximation comme distribution d'importance, on peut écrire

$$I = \int_{\mathbb{R}} h_n(x) q(x) dx = \int_{\mathbb{R}} h_n(x) \frac{q(x)}{q_{N,h}(x)} q_{N,h}(x) dx ,$$

et on obtient une seconde approximation de  $I$ , paramétrée par le nombre  $N$  de particules, par la taille  $M$  de l'échantillon et par la largeur  $h$  de la fenêtre, c'est-à-dire

$$\frac{1}{M} \sum_{j=1}^M h_n(x_j) \frac{q(x_j)}{q_{N,h}(x_j)},$$

où  $(x_1, \dots, x_M)$  est un  $M$ -échantillon distribué selon  $q_{N,h}(x) dx$ .

L'objectif ici est d'appliquer cette approche au calcul de la probabilité d'exercice  $p$  et au calcul du prix  $P$  de l'option, séparément.

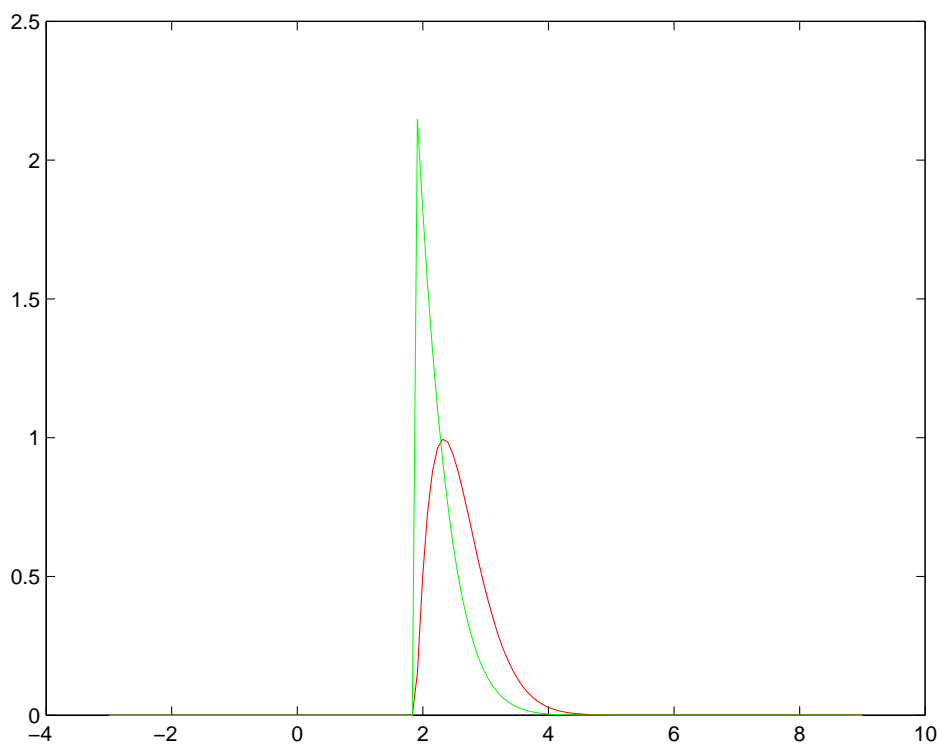


Figure 1: Densités d'importance optimales

**Estimation de la probabilité d'exercice  $p$  :** La distribution d'importance

$$\mu_n = h_n \cdot \mu = \frac{h_n \mu}{\langle \mu, h_n \rangle} \quad \text{avec} \quad h_n(x) = 1_{(V(x) \geq K)},$$

représentée Figure 1 (en vert), est optimale pour l'estimation de la probabilité d'exercice  $p$ , et on suit l'approche proposée pour l'apprentissage de cette distribution d'importance optimale.

On introduit une suite croissante

$$S_0 = a_0 < \dots < a_k < \dots < a_n = K ,$$

de niveaux entre le prix  $S_0$  de l'actif à l'instant 0 et le prix d'exercice  $K$ , et on définit

$$h_k(x) = \varepsilon \cdot 1_{(V(x) < a_k)} + 1_{(V(x) \geq a_k)} = \varepsilon + (1 - \varepsilon) \cdot 1_{(V(x) \geq a_k)} ,$$

pour tout  $k = 0, 1, \dots, (n - 1)$ , avec  $\varepsilon > 0$ .

- (iv) Mettre en œuvre l'algorithme SIR pour estimer la probabilité d'exercice  $p$  et pour générer un  $N$ -échantillon distribué (approximativement) selon la distribution d'importance optimale  $\mu_n(dx)$ . Avec l'échantillon obtenu, calculer une première approximation du prix  $P_0$ . On utilisera des niveaux régulièrement espacés entre le prix  $S_0$  de l'actif à l'instant 0 et le prix d'exercice  $K$ , et on prendra les valeurs numériques  $c = 0.9$  pour le noyau réversible et  $\varepsilon = 0.01$  pour les approximations successives de la fonction  $h_n(x)$ . On pourra par exemple représenter à l'aide d'un histogramme l'approximation particulière obtenue à la dernière étape, comme à la Figure 2 (en jaune).

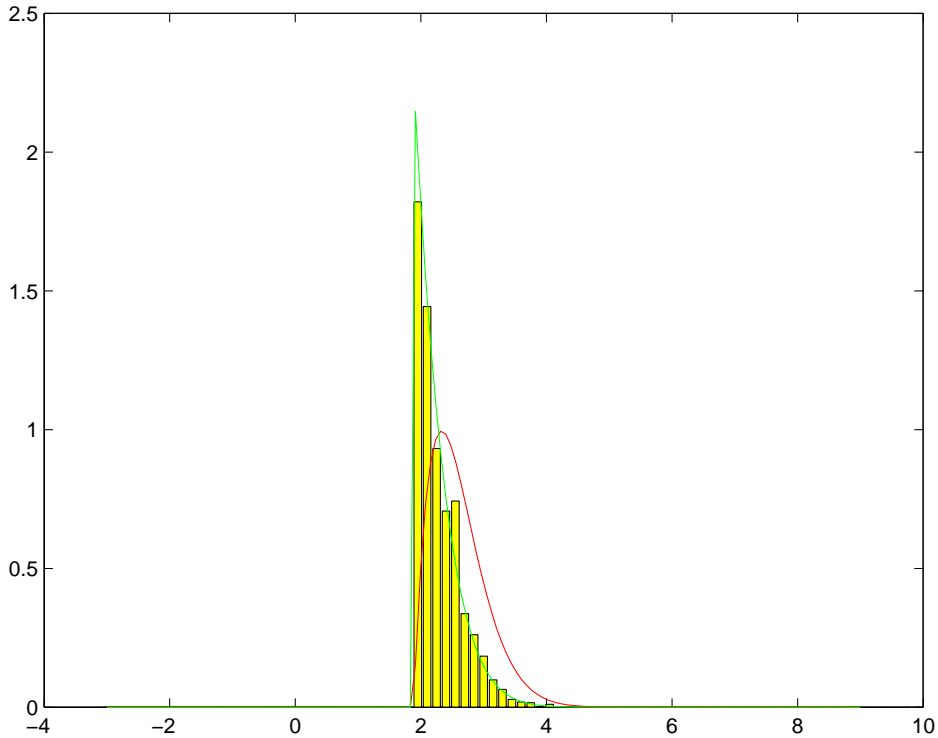


Figure 2: Apprentissage de la distribution d'importance optimale pour l'estimation de la probabilité d'exercice  $p$

- (v) Construire par convolution avec un noyau régularisant, une seconde approximation de la distribution d'importance optimale  $\mu_n(dx)$  et générer un  $M$ -échantillon distribué selon l'approximation régularisée. Avec l'échantillon obtenu, calculer une seconde approximation de la probabilité d'exercice  $p$  et du prix  $P_0$ . On utilisera une densité gaussienne réduite centrée pour la famille de noyaux régularisants, et on prendra la valeur numérique  $h = 0.1$  pour la largeur de la fenêtre. On représentera la densité obtenue par régularisation, comme à la Figure 3 (en bleu).

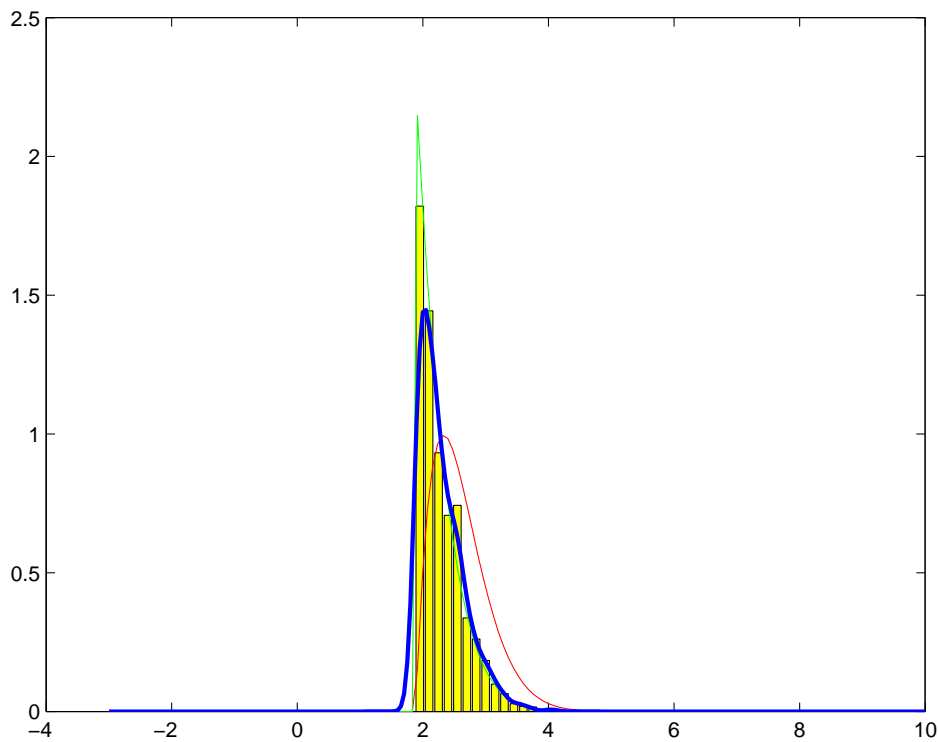


Figure 3: Approximation régularisée de la densité d'importance optimale pour l'estimation de la probabilité d'exercice  $p$

**Estimation du prix  $P_0$  :** La distribution d'importance utilisée ci-dessus est optimale pour l'estimation de la probabilité d'exercice  $p$ , mais pas pour l'estimation du prix  $P_0$  : en revanche, la distribution d'importance

$$\mu_n = h_n \cdot \mu = \frac{h_n \mu}{\langle \mu, h_n \rangle} \quad \text{avec} \quad h_n(x) = \max(V(x) - K, 0) ,$$

représentée Figure 1 (en rouge), est optimale pour l'estimation du prix  $P_0$ , et on suit l'approche proposée pour l'apprentissage de cette distribution d'importance optimale. On introduit une suite croissante

$$S_0 = a_0 < \dots < a_k < \dots < a_n = K ,$$

de niveaux entre le prix  $S_0$  de l'actif à l'instant 0 et le prix d'exercice  $K$ , et on définit

$$h_k(x) = \varepsilon \cdot 1_{(V(x) < a_k)} + \max(V(x) - a_k, 0) = \varepsilon + (V(x) - a_k - \varepsilon) \cdot 1_{(V(x) \geq a_k)} ,$$

ou bien alternativement

$$h_k(x) = \max(V(x) - a_k, \varepsilon) = \varepsilon + (V(x) - a_k - \varepsilon) \cdot 1_{(V(x) \geq a_k + \varepsilon)} ,$$

pour tout  $k = 0, 1, \dots, (n - 1)$ , avec  $\varepsilon > 0$ .

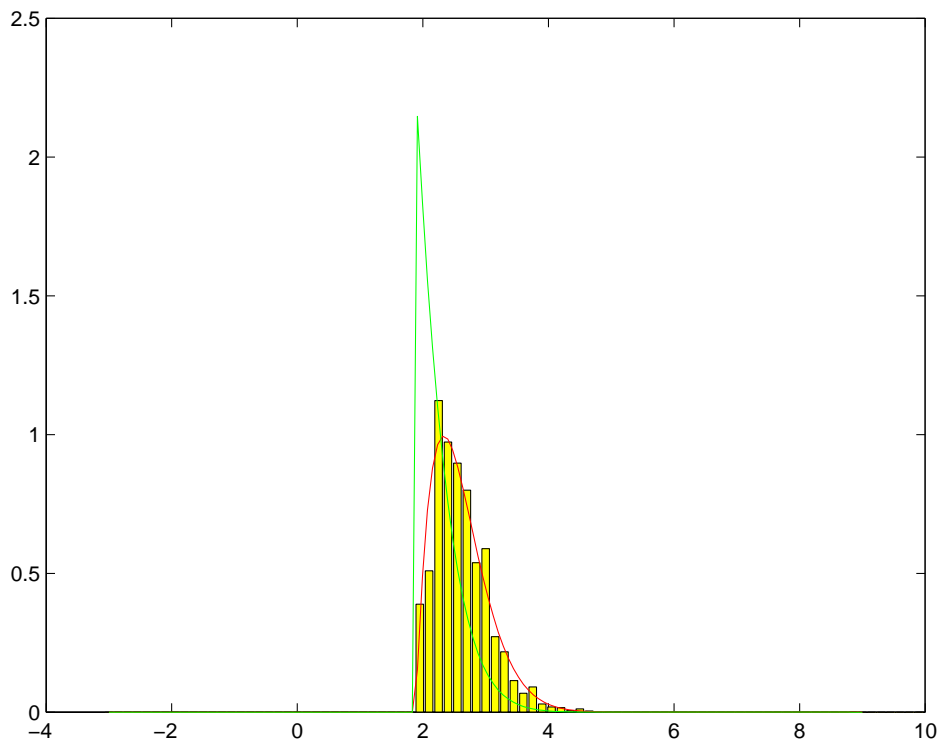


Figure 4: Apprentissage de la distribution d'importance optimale pour l'estimation du prix  $P_0$

- (vi) Mettre en œuvre l'algorithme SIR pour estimer le prix  $P_0$  et pour générer un  $N$ -échantillon distribué (approximativement) selon la distribution d'importance optimale  $\mu_n(dx)$ . On utilisera des niveaux régulièrement espacés entre le prix  $S_0$  de l'actif à l'instant 0 et le

prix d'exercice  $K$ , et on prendra les valeurs numériques  $c = 0.9$  pour le noyau réversible et  $\varepsilon = 0.1$  pour les approximations successives de la fonction  $h_n(x)$ . On pourra par exemple représenter à l'aide d'un histogramme l'approximation particulière obtenue à la dernière étape, comme à la Figure 4 (en jaune).

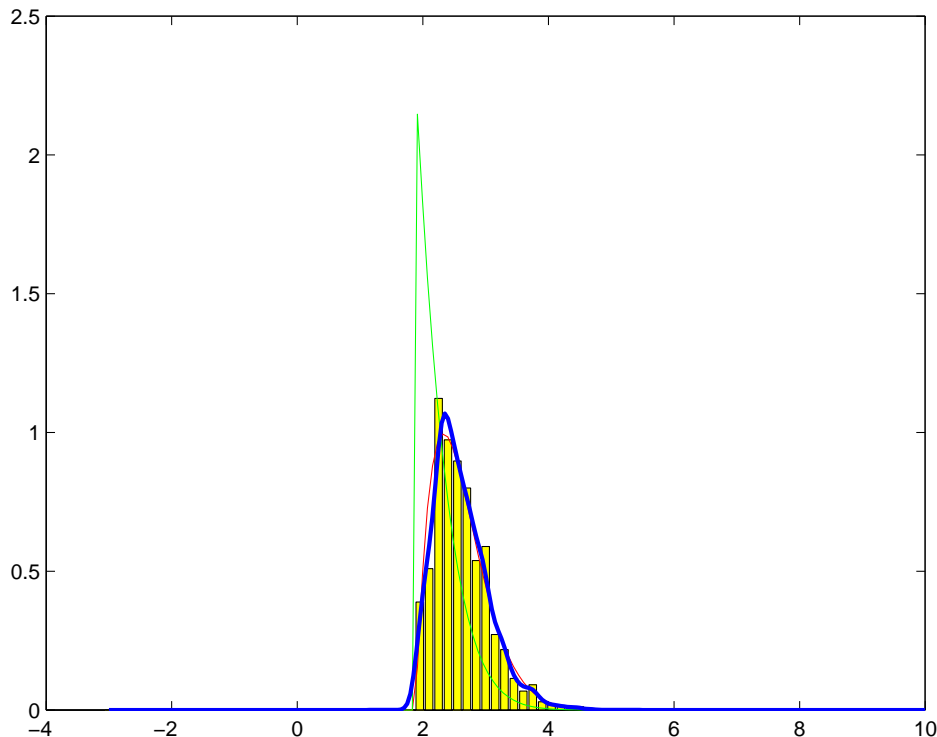


Figure 5: Approximation régularisée de la densité d'importance optimale pour l'estimation du prix  $P_0$

- (vii) Construire par convolution avec un noyau régularisant, une seconde approximation de la distribution d'importance optimale  $\mu_n(dx)$  et générer un  $M$ -échantillon distribué selon l'approximation régularisée. Avec l'échantillon obtenu, calculer une seconde approximation du prix  $P_0$ . On utilisera une densité gaussienne réduite centrée pour la famille de noyaux régularisants, et on prendra la valeur numérique  $h = 0.1$  pour la largeur de la fenêtre. On représentera la densité obtenue par régularisation, comme à la Figure 5 (en bleu).

On s'intéressera à la variance des estimateurs, dont une valeur approchée sera obtenue en répétant plusieurs simulations Monte Carlo indépendantes, et on vérifiera la réduction de variance apportée par le post-traitement mis en œuvre aux questions (v) et (vii), par rapport à la méthode mise en œuvre aux questions (iv) et (vi) ou dans la première partie à la question (iii).