École Nationale Supérieure de Techniques Avancées
filière Commande des Systèmes, 2008–2009
lundi 13 octobre 2008

cours B7–3 (5/5)

Filtrage Bayésien et Approximation Particulaire

François Le Gland
IRISA / INRIA Rennes

http://www.irisa.fr/aspi/legland/ensta/

Théorèmes limites pour les approximations particulaires

- distributions normalisées et non–normalisées
- erreur dans $\mathbb{L}^p$ pour les approximations particulaires
- TCL pour les tableaux triangulaires d'acroissement de martingales
- TCL pour les approximations particulaires

évolution de la distribution normalisée (flot non–linéaire)

$$\mu_{k-1} \xrightarrow{\text{mutation}} \eta_k = \mu_{k-1}\, Q_k \xrightarrow{\text{pondération}} \mu_k = g_k \cdot \eta_k$$

avec la condition initiale $\mu_0 = g_0 \cdot \eta_0$, où la notation $\cdot$ désigne le produit projectif

difficulté du problème mesurée par le rapport

$$r_k = \frac{\sup\limits_{x \in E} g_k(x)}{\langle \eta_k , g_k \rangle} \geq 1$$

approximation particulaire (éventuellement) pondérée

$$\eta_k \approx \eta_k^N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\xi_k^i} \qquad \text{et} \qquad \mu_k \approx \mu_k^N = \sum_{i=1}^N w_k^i\, \delta_{\xi_k^i}$$

avec la condition initiale $\mu_0^N = g_0 \cdot \eta_0^N$ et $\eta_0^N = S^N(\eta_0)$

immédiatement à partir de la définition

$$\mu_k^N = g_k \cdot \eta_k^N = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^N g_k(\xi_k^i)\ \delta_{\xi_k^i}}{\displaystyle\sum_{j=1}^N g_k(\xi_k^j)} = \sum_{i=1}^N w_k^i\, \delta_{\xi_k^i}$$

est automatiquement sous la forme recherchée, et

$$\langle \eta_k^N, g_k \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g_k(\xi_k^i)$$

en revanche

$$\mu_{k-1}^N\, Q_k = \sum_{i=1}^N w_{k-1}^i\, m_k^i \qquad \text{avec} \qquad m_k^i(dx') = Q_k(\xi_{k-1}^i, dx')$$

apparaît seulement sous la forme d'un mélange fini, et l'approximation

$$\eta_k^N \approx \mu_{k-1}^N\, Q_k$$

doit encore être précisée

évolution de la distribution non–normalisée (flot linéaire)

$$\gamma_k = \gamma_{k-1}\, R_k = g_k\ (\gamma_{k-1}\, Q_k) = g_k\ (\mu_{k-1}\, Q_k)\ \langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle = g_k\ \eta_k\ \langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle$$

avec la condition initiale $\gamma_0 = g_0\ \eta_0$: clairement

$$\langle \gamma_k, 1 \rangle = \langle \eta_k, g_k \rangle\ \langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle \qquad \text{et} \qquad \langle \gamma_0, 1 \rangle = \langle \eta_0, g_0 \rangle \qquad (\star)$$

approximation particulaire

$$\gamma_k^N = g_k\ \eta_k^N\ \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle$$

avec la condition initiale $\gamma_0^N = g_0\ \eta_0^N$ et $\eta_0^N = S^N(\eta_0)$: clairement

$$\langle \gamma_k^N, 1 \rangle = \langle \eta_k^N, g_k \rangle\ \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle \qquad \text{et} \qquad \langle \gamma_0^N, 1 \rangle = \langle \eta_0^N, g_0 \rangle \qquad (\star\star)$$

d'où on déduit que

$$\frac{\gamma_k^N}{\langle \gamma_k^N, 1 \rangle} = g_k \cdot \eta_k^N = \mu_k^N \qquad \text{et} \qquad \frac{\gamma_0^N}{\langle \gamma_0^N, 1 \rangle} = g_0 \cdot \eta_0^N = \mu_0^N$$

en itérant les relations $(\star)$ et $(\star\star)$, on obtient

$$\langle \gamma_n, 1 \rangle = \prod_{k=0}^{n} \langle \eta_k, g_k \rangle \qquad \text{et} \qquad \langle \gamma_n^N, 1 \rangle = \prod_{k=0}^{n} \langle \eta_k^N, g_k \rangle$$

erreur dans $\mathbb{L}^p$ pour les approximations particulaires

Théorème pour la constante de normalisation et pour la distribution normalisée

$$\mathbb{E}|\, \frac{\langle \gamma_n^N, 1 \rangle}{\langle \gamma_n, 1 \rangle} - 1 \,| \leq z_n^N \qquad \text{et} \qquad \sup_{\phi \,:\, \|\phi\|=1} \mathbb{E}|\, \langle \mu_n^N - \mu_n, \phi \rangle \,| \leq 2\, z_n^N$$

où la suite $\{z_k^N\}$ vérifie la récurrence linéaire

$$z_k^N \leq r_k\, (1 + \frac{1}{\sqrt{N}})\, z_{k-1}^N + \frac{r_k}{\sqrt{N}} \qquad \text{et} \qquad z_0^N \leq \frac{r_0}{\sqrt{N}}$$

estimations similaires dans $\mathbb{L}^p$ pour tout $p \geq 1$ (en utilisant les inégalités de Marcinkiewicz–Zygmund)

Remarque pour toute fonction ϕ mesurable bornée

$$\langle \mu_n^N - \mu_n, \phi \rangle = \frac{\langle \gamma_n^N, \phi \rangle}{\langle \gamma_n^N, 1 \rangle} - \frac{\langle \gamma_n, \phi \rangle}{\langle \gamma_n, 1 \rangle} = \frac{\langle \gamma_n^N - \gamma_n, \phi \rangle}{\langle \gamma_n, 1 \rangle} - \langle \mu_n^N, \phi \rangle \, \frac{\langle \gamma_n^N - \gamma_n, 1 \rangle}{\langle \gamma_n, 1 \rangle}$$

de sorte que

$$| \langle \mu_n^N - \mu_n, \phi \rangle | \leq \frac{| \langle \gamma_n^N - \gamma_n, \phi \rangle |}{\langle \gamma_n, 1 \rangle} + \|\phi\| \, \frac{| \langle \gamma_n^N - \gamma_n, 1 \rangle |}{\langle \gamma_n, 1 \rangle}$$

ce qui montre que

$$\sup_{\phi \, : \, \|\phi\| = 1} \mathbb{E} | \langle \mu_n^N - \mu_n, \phi \rangle | \leq 2 \sup_{\phi \, : \, \|\phi\| = 1} \mathbb{E} \frac{| \langle \gamma_n^N - \gamma_n, \phi \rangle |}{\langle \gamma_n, 1 \rangle}$$

et pour démontrer le Théorème il suffit donc de prouver que la suite définie par

$$z_k^N = \sup_{\phi \, : \, \|\phi\| = 1} \mathbb{E} \frac{| \langle \gamma_k^N - \gamma_k, \phi \rangle |}{\langle \gamma_k, 1 \rangle}$$

pour tout $k = 0, 1, \cdots, n$ vérifie la relation de récurrence linéaire

Preuve du Théorème on rappelle que

$$\mathbb{E}|\,\langle \eta_0^N - \eta_0, \phi\rangle\,| \leq \frac{1}{\sqrt{N}}\,\|\phi\|$$

- pour $k=0$, on a

$$\langle \gamma_0^N - \gamma_0, \phi\rangle = \langle \eta_0^N - \eta_0, g_0\,\phi\rangle$$

pour toute fonction ϕ mesurable bornée, on remarque que

$$\mathbb{E}|\,\langle \eta_0^N - \eta_0, g_0\,\phi\rangle\,| \leq \frac{1}{\sqrt{N}}\,\sup_{x\in E} g_0(x)\,\|\phi\|$$

et en divisant par $\langle \gamma_0, 1\rangle = \langle \eta_0, g_0\rangle$ on obtient

$$z_0^N = \sup_{\phi\,:\,\|\phi\|=1} \mathbb{E}\frac{|\,\langle \gamma_0^N - \gamma_0, \phi\rangle\,|}{\langle \gamma_0, 1\rangle} \leq \frac{1}{\sqrt{N}}\,\frac{\sup\limits_{x\in E} g_0(x)}{\langle \eta_0, g_0\rangle} = \frac{r_0}{\sqrt{N}}$$

on rappelle que

$$\mathbb{E}[\,|\,\langle \eta_k^N - \mu_{k-1}^N\, Q_k , \phi \rangle \,|\,|\, \mathcal{H}_{k-1}^N\,] \leq \frac{1}{\sqrt{N}}\, \|\phi\|$$

où $\mathcal{H}_{k-1}^N$ dénote la tribu engendrée par tous les systèmes de particules jusqu'à la $(k-1)$–ème génération

▶ pour $k = 1, \cdots, n$, on a

$$\begin{aligned} \gamma_k^N - \gamma_k &= g_k\, \eta_k^N\, \langle \gamma_{k-1}^N , 1 \rangle - g_k\, (\gamma_{k-1}\, Q_k) \\ &= g_k\, (\gamma_{k-1}^N\, Q_k - \gamma_{k-1}\, Q_k) + g_k\, (\eta_k^N - \mu_{k-1}^N\, Q_k)\, \langle \gamma_{k-1}^N , 1 \rangle \end{aligned}$$

de sorte que

$$\langle \gamma_k^N - \gamma_k , \phi \rangle = \langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1} , Q_k (g_k\, \phi) \rangle + \langle \eta_k^N - \mu_{k-1}^N\, Q_k , g_k\, \phi \rangle\, \langle \gamma_{k-1}^N , 1 \rangle$$

pour toute fonction ϕ mesurable bornée on en déduit que

$$\sup_{\phi\,:\,\|\phi\|=1} \mathbb{E}|\,\langle \gamma_k^N - \gamma_k, \phi\rangle\,|$$

$$\leq \sup_{\phi\,:\,\|\phi\|=1} \mathbb{E}|\,\langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1}, Q_k(g_k\,\phi)\rangle\,|$$

$$+ \sup_{\phi\,:\,\|\phi\|=1} \mathbb{E}[\,|\,\langle \eta_k^N - \mu_{k-1}^N\,Q_k, g_k\,\phi\rangle\,|\,\langle \gamma_{k-1}^N, 1\rangle\,]$$

on remarque que

$$\sup_{\phi\,:\,\|\phi\|=1} \mathbb{E}|\,\langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1}, Q_k(g_k\,\phi)\rangle\,|$$

$$\leq \sup_{x\in E} g_k(x) \sup_{\phi\,:\,\|\phi\|=1} \mathbb{E}|\,\langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1}, \phi\rangle\,|$$

compte tenu que

$$|Q_k(g_k\,\phi)(x)| = |\int_E Q_k(x, dx')\; g_k(x')\,\phi(x')\,| \leq \sup_{x\in E} g_k(x)\;\|\phi\|$$

et en divisant par $\langle \gamma_k , 1 \rangle = \langle \eta_k , g_k \rangle \; \langle \gamma_{k-1} , 1 \rangle$ on obtient

$$z_k^N = \sup_{\phi \,:\, \|\phi\|=1} \mathbb{E} \frac{|\, \langle \gamma_k^N - \gamma_k , \phi \rangle \,|}{\langle \gamma_k , 1 \rangle}$$

$$\leq \frac{\sup\limits_{x \in E} g_k(x)}{\langle \eta_k , g_k \rangle} \; \sup_{\phi \,:\, \|\phi\|=1} \mathbb{E} \frac{|\, \langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1} , \phi \rangle \,|}{\langle \gamma_{k-1} , 1 \rangle}$$

$$+ \sup_{\phi \,:\, \|\phi\|=1} \mathbb{E} \frac{|\, \langle \eta_k^N - \mu_{k-1}^N \, Q_k , g_k \, \phi \rangle \,| \; \langle \gamma_{k-1}^N , 1 \rangle}{\langle \eta_k , g_k \rangle \; \langle \gamma_{k-1} , 1 \rangle}$$

i.e.

$$z_k^N \leq r_k \; z_{k-1}^N + \varepsilon_k^N \qquad (\bullet)$$

avec l'erreur locale définie par

$$\varepsilon_k^N = \sup_{\phi \,:\, \|\phi\|=1} \mathbb{E} \frac{|\, \langle \eta_k^N - \mu_{k-1}^N \, Q_k , g_k \, \phi \rangle \,| \; \langle \gamma_{k-1}^N , 1 \rangle}{\langle \eta_k , g_k \rangle \; \langle \gamma_{k-1} , 1 \rangle}$$

comme terme forçant

on remarque que

$$\mathbb{E}[\,|\,\langle \eta_k^N - \mu_{k-1}^N\, Q_k, g_k\, \phi\rangle\,|\,|\,\mathcal{H}_{k-1}^N\,] \leq \frac{1}{\sqrt{N}}\, \sup_{x \in E} g_k(x)\; \|\phi\|$$

où $\mathcal{H}_{k-1}^N$ dénote la tribu engendrée par le système de particules jusqu'à la $(k-1)$–ème génération, puis

- en multipliant par $\langle \gamma_{k-1}^N, 1\rangle$ mesurable par rapport à $\mathcal{H}_{k-1}^N$
- et en divisant par $\langle \eta_k, g_k\rangle\; \langle \gamma_{k-1}, 1\rangle$

on obtient

$$\frac{\mathbb{E}[\,|\,\langle \eta_k^N - \mu_{k-1}^N\, Q_k, g_k\, \phi\rangle\,|\,\langle \gamma_{k-1}^N, 1\rangle\,|\,\mathcal{H}_{k-1}^N\,]}{\langle \eta_k, g_k\rangle\; \langle \gamma_{k-1}, 1\rangle}$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{N}}\; \frac{\sup_{x \in E} g_k(x)}{\langle \eta_k, g_k\rangle}\; \frac{\langle \gamma_{k-1}^N, 1\rangle}{\langle \gamma_{k-1}, 1\rangle}\; \|\phi\|$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{N}}\; r_k\; (\,1 + \frac{|\,\langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1}, 1\rangle\,|}{\langle \gamma_{k-1}, 1\rangle}\,)\; \|\phi\|$$

on en déduit que

$$\varepsilon_k^N = \sup_{\phi\,:\,\|\phi\|=1} \mathbb{E}\frac{|\,\langle \eta_k^N - \mu_{k-1}^N\, Q_k, g_k\, \phi\rangle\,|\,\langle \gamma_{k-1}^N, 1\rangle}{\langle \eta_k, g_k\rangle\,\langle \gamma_{k-1}, 1\rangle}$$

$$\leq \frac{r_k}{\sqrt{N}}\,(\,1 + \mathbb{E}\frac{|\,\langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1}, 1\rangle\,|}{\langle \gamma_{k-1}, 1\rangle}\,) \leq \frac{r_k}{\sqrt{N}}\,(1 + z_{k-1}^N)$$

et en reportant cette estimation dans $(\bullet)$ on obtient

$$z_k^N \leq r_k\,(1 + \frac{1}{\sqrt{N}})\, z_{k-1}^N + \frac{r_k}{\sqrt{N}} \qquad \square$$

rappel : convergence en distribution

soit X_N et X des v.a. à valeurs dans un espace métrique (E, d)
par définition $X_N \Rightarrow X$ en distribution quand $N \uparrow \infty$ ssi

$$\mathbb{E}[f(X_N)] \longrightarrow \mathbb{E}[f(X)] \qquad \text{pour toute fonction } f \text{ continue et bornée}$$

pour des v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, une CNS est la convergence ponctuelle des fonctions caractéristiques, c–à–d

$$\mathbb{E}[\exp\{i\, u^* X_N\}] \longrightarrow \mathbb{E}[\exp\{i\, u^* X\}] \qquad \text{pour tout vecteur } u \in \mathbb{R}^m$$

Lemme de Slutsky

soit X_N et X des v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, et soit Y_N des v.a. réelles : si

- $X_N \Rightarrow X$ en distribution quand $N \uparrow \infty$
- $Y_N \Rightarrow a$ en probabilité quand $N \uparrow \infty$, où a est une constante

alors

$$Y_N\, X_N \Rightarrow a\, X \text{ en distribution quand } N \uparrow \infty$$

TCL pour les tableaux triangulaires

pour tout $N \geq 1$, soit $\mathcal{F}^N = \{\mathcal{F}_k^N\,,\, k = 1, \cdots, K_N\}$ une suite croissante de tribus, et soit $X^N = \{X_k^N\,,\, k = 1, \cdots, K_N\}$ une suite adaptée à $\mathcal{F}^N$ (c'est–à–dire que la v.a. X_k^N est mesurable par rapport à $\mathcal{F}_k^N$, pour tout $k = 1, \cdots, K_N$)

Théorème si

$$\mathbb{E}[X_k^N \mid \mathcal{F}_{k-1}^N] = 0$$

pour tout $N \geq 1$ et pour tout $k = 1, \cdots, K_N$, si

$$V_N = \sum_{k=1}^{K_N} \mathbb{E}[\,|X_k^N|^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}^N] \longrightarrow V$$

en probabilité quand $N \uparrow \infty$, et si pour tout $\varepsilon > 0$

$$F_N(\varepsilon) = \sum_{k=1}^{K_N} \mathbb{E}[1_{(|X_k^N| > \varepsilon)}\, |X_k^N|^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}^N] \longrightarrow 0$$

en probabilité quand $N \uparrow \infty$

alors

$$S_N = \sum_{k=1}^{K_N} X_k^N \Longrightarrow \mathcal{N}(0, V)$$

en distribution quand $N \uparrow \infty$

Remarque si pour un certain $d > 0$

$$Y_N = \sum_{k=1}^{K_N} \mathbb{E}[\,|X_k^N|^{2+d} \mid \mathcal{F}_{k-1}^N] \longrightarrow 0$$

en probabilité quand $N \uparrow \infty$, alors la condition de Lindeberg est satisfaite

$$|x|^{2+d} = |x|^{2+d}\ 1_{(|x| \leq \varepsilon)} + |x|^{2+d}\ 1_{(|x| > \varepsilon)} \geq \varepsilon^d\ |x|^2\ 1_{(|x| > \varepsilon)}$$

pour tout nombre réel x et pour tout $\varepsilon > 0$, de sorte que

$$F_N(\varepsilon) = \sum_{k=1}^{K_N} \mathbb{E}[1_{(|X_k^N| > \varepsilon)}\ |X_k^N|^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}^N] \leq \frac{1}{\varepsilon^d} \sum_{k=1}^{K_N} \mathbb{E}[\,|X_k^N|^{2+d} \mid \mathcal{F}_{k-1}^N] \longrightarrow 0$$

en probabilité quand $N \uparrow \infty$

TCL pour les approximations particulaires

on se limite ici au cas de la redistribution multinomiale, c–à–d

$$\eta_k^N = S^N(\mu_{k-1}^N\, Q_k) = \frac{1}{N}\,\sum_{i=1}^N \delta_{\xi_k^i}$$

où les v.a. $\xi_k^1, \cdots, \xi_k^N$ sont i.i.d. de distribution de probabilité (mélange fini)

$$\mu_{k-1}^N\, Q_k(dx') = \sum_{i=1}^N w_{k-1}^i\; Q_k(\xi_{k-1}^i, dx')$$

on rappelle que dans ce cas

$$\mathbb{E}[\frac{1}{N}\,\sum_{i=1}^N \phi(\xi_k^i) \mid \mathcal{H}_{k-1}^N] = \langle \mu_{k-1}^N\, Q_k, \phi \rangle$$

et

$$\mathbb{E}[\,|\frac{1}{N}\,\sum_{i=1}^N \phi(\xi_k^i) - \langle \mu_{k-1}^N\, Q_k, \phi \rangle\,|^2 \mid \mathcal{H}_{k-1}^N] = \frac{1}{N}\,\mathrm{var}(\phi, \mu_{k-1}^N\, Q_k)$$

Théorème pour la constante de normalisation et pour la distribution normalisée

$$\sqrt{N}\,[\,\frac{\langle \gamma_n^N, 1\rangle}{\langle \gamma_n, 1\rangle} - 1\,] \Longrightarrow \mathcal{N}(0, V_n) \qquad \text{et} \qquad \sqrt{N}\,\langle \mu_n^N - \mu_n, \phi\rangle \Longrightarrow \mathcal{N}(0, v_n(\phi))$$

en distribution quand $N \uparrow \infty$, avec la variance asymptotique définie par

$$V_n = \sum_{k=0}^{n} [\,\frac{\langle \eta_k, (g_k\, R_{k+1:n}\, 1)^2\rangle}{\langle \eta_k, g_k\, R_{k+1:n}\, 1\rangle^2} - 1\,]$$

$$v_n(\phi) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle \eta_k, |g_k\, R_{k+1:n}\, (\phi - \langle \mu_n, \phi\rangle)\,|^2\,\rangle}{\langle \eta_k, g_k\, R_{k+1:n}\, 1\rangle^2}$$

respectivement, où

$$R_{k+1:n}\,\phi(x) = R_{k+1}\cdots R_n\,\phi(x) = \mathbb{E}[\phi(X_n)\,\prod_{p=k+1}^{n} g_p(X_p)\mid X_k = x]$$

pour tout $k = 0, 1, \cdots, n$, avec la convention $R_{n+1:n}\,\phi(x) = \phi(x)$

Remarque pour démontrer le Théorème, il suffit de démontrer que

$$\sqrt{N}\,\frac{\langle \gamma_n^N - \gamma_n, \phi\rangle}{\langle \gamma_n, 1\rangle} \Longrightarrow \mathcal{N}(0, V_n(\phi))$$

en distribution quand $N \uparrow \infty$, avec la variance asymptotique définie par

$$V_n(\phi)\ \langle \gamma_n, 1\rangle^2 = \mathrm{var}(g_0\, R_{1:n}\, \phi, \eta_0) + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{var}(g_k\, R_{k+1:n}\, \phi, \eta_k)\ \langle \gamma_{k-1}, 1\rangle^2 \qquad (\circ)$$

ou de manière équivalente par

$$V_n(\phi) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{var}(g_k\, R_{k+1:n}\, \phi, \eta_k)}{\langle \eta_k, g_k\, R_{k+1:n}\, 1\rangle^2}$$

compte tenu que

$$\langle \gamma_n, 1\rangle = \langle \gamma_0\, R_{1:n}, 1\rangle = \langle \eta_0, g_0\, R_{1:n}\, 1\rangle$$

pour $k = 0$, et que

$$\langle \gamma_n, 1\rangle = \langle \gamma_{k-1}\, R_{k:n}, 1\rangle = \langle \gamma_{k-1}, 1\rangle\ \langle \eta_k, g_k\, R_{k+1:n}\, 1\rangle$$

pour tout $k = 1, \cdots, n$

on remarque d'abord que

$$V_n = V_n(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{var}(g_k\, R_{k+1:n}\, 1, \eta_k)}{\langle \eta_k , g_k\, R_{k+1:n}\, 1 \rangle^2} = \sum_{k=0}^{n} [\, \frac{\langle \eta_k , (g_k\, R_{k+1:n}\, 1)^2 \rangle}{\langle \eta_k , g_k\, R_{k+1:n}\, 1 \rangle^2} - 1\,]$$

ce qui montre le Théorème pour la constante de normalisation

on remarque aussi que

$$\langle \mu_n^N - \mu_n , \phi \rangle = \langle \frac{\gamma_n^N}{\langle \gamma_n^N , 1 \rangle} , \phi - \langle \mu_n , \phi \rangle \, \rangle = \frac{\langle \gamma_n , 1 \rangle}{\langle \gamma_n^N , 1 \rangle} \, \langle \frac{\gamma_n^N - \gamma_n}{\langle \gamma_n , 1 \rangle} , \phi - \langle \mu_n , \phi \rangle \, \rangle$$

pour toute fonction mesurable bornée ϕ, et que $\langle \gamma_n^N , 1 \rangle \longrightarrow \langle \gamma_n , 1 \rangle$ en probabilité quand $N \uparrow \infty$, ce qui montre le Théorème pour la distribution normalisée (en utilisant le lemme de Slutsky), avec

$$v_n(\phi) = V_n(\phi - \langle \mu_n , \phi \rangle) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{var}(g_k\, R_{k+1:n}\, (\phi - \langle \mu_n , \phi \rangle), \eta_k)}{\langle \eta_k , g_k\, R_{k+1:n}\, 1 \rangle^2}$$

on remarque finalement que

$$\mathrm{var}(g_k\, R_{k+1:n}\,(\phi - \langle \mu_n, \phi\rangle), \eta_k) = \langle \eta_k, |g_k\, R_{k+1:n}\,(\phi - \langle \mu_n, \phi\rangle)\,|^2\,\rangle$$

pour tout $k = 0, 1, \cdots, n$, compte tenu que

$$\langle \eta_0, g_0\, R_{1:n}\,(\phi - \langle \mu_n, \phi\rangle)\,\rangle = \langle \gamma_0\, R_{1:n}, \phi - \langle \mu_n, \phi\rangle\,\rangle = \langle \gamma_n, \phi - \langle \mu_n, \phi\rangle\,\rangle = 0$$

pour $k = 0$, et que

$$\langle \eta_k, g_k\, R_{k+1:n}\,(\phi - \langle \mu_n, \phi\rangle)\,\rangle = \langle \mu_{k-1}\, R_{k:n}, \phi - \langle \mu_n, \phi\rangle\,\rangle = \frac{\langle \gamma_n, \phi - \langle \mu_n, \phi\rangle\,\rangle}{\langle \gamma_{k-1}, 1\rangle} = 0$$

pour tout $k = 1, \cdots, n$

Remarque le vecteur aléatoire

$$(\sqrt{N}\,[\,\frac{\langle \gamma_n^N, 1\rangle}{\langle \gamma_n, 1\rangle} - 1\,], \sqrt{N}\,\langle \mu_n^N - \mu_n, \phi_1\rangle, \cdots, \sqrt{N}\,\langle \mu_n^N - \mu_n, \phi_d\rangle)$$

converge conjointement en distribution quand $N \uparrow \infty$ vers une limite gaussienne, pour toutes fonctions mesurables bornées $\phi_1, \cdots, \phi_d$ (en utilisant le procédé de Cramér–Wold)

Preuve du Théorème pour toute fonction mesurable bornée ϕ, en utilisant une somme télescopique et la relation

$$\gamma_k^N = g_k\, \eta_k^N\, \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle$$

pour tout $k = 1, \cdots, n$, on obtient la décomposition suivante

$$\begin{aligned}
\langle \gamma_n^N - \gamma_n, \phi \rangle &= \sum_{k=1}^{n} \langle \gamma_k^N - \gamma_{k-1}^N\, R_k, R_{k+1:n}\, \phi \rangle + \langle \gamma_0^N - \gamma_0, R_{1:n}\, \phi \rangle \\
&= \sum_{k=1}^{n} \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle\, \langle g_k\, (\eta_k^N - \mu_{k-1}^N\, Q_k), R_{k+1:n}\, \phi \rangle + \langle g_0\, (\eta_0^N - \eta_0), R_{1:n}\, \phi \rangle \\
&= \sum_{k=1}^{n} \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle\, \langle \eta_k^N - \mu_{k-1}^N\, Q_k, f_k \rangle + \langle \eta_0^N - \eta_0, f_0 \rangle
\end{aligned}$$

où la collection $f = (f_0, f_1, \cdots, f_n)$ de fonctions mesurables bornées est définie par

$$f_k(x) = g_k(x)\, R_{k+1:n}\, \phi(x)$$

pour tout $k = 0, 1, \cdots, n$, avec la convention $R_{n+1:n}\, \phi(x) = \phi(x)$

étape 1 (décomposition) ▶ pour $k = 0$, on remarque que

$$\langle \eta_0^N - \eta_0, f_0 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} [f_0(\xi_0^i) - \langle \eta_0, f_0 \rangle\,] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{N} X_{0,i}^N$$

avec par définition

$$X_{0,i}^N = \frac{1}{\sqrt{N}}\, [f_0(\xi_0^i) - \langle \eta_0, f_0 \rangle]$$

pour tout $i = 1, \cdots, N$, où les variables aléatoires $\xi_0^1, \cdots, \xi_0^N$ sont i.i.d. de distribution de probabilité η_0

▶ pour tout $k = 1, \cdots, n$, on remarque que

$$\langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle \; \langle \eta_k^N - \mu_{k-1}^N \, Q_k, f_k \rangle \; = \; \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle \; \frac{1}{N} \; \sum_{i=1}^N [f_k(\xi_k^i) - \langle \mu_{k-1}^N \, Q_k, f_k \rangle \,]$$

$$= \; \frac{1}{\sqrt{N}} \; \sum_{i=1}^N X_{k,i}^N$$

avec par définition

$$X_{k,i}^N = \frac{\langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle}{\sqrt{N}} \; [f_k(\xi_k^i) - \langle \mu_{k-1}^N \, Q_k, f_k \rangle]$$

pour tout $i = 1, \cdots, N$, où conditionnellement par rapport à la tribu $\mathcal{H}_{k-1}^N$ engendrée par le système de particules jusqu'à la $(k-1)$–ème génération, les variables aléatoires $\xi_k^1, \cdots, \xi_k^N$ sont i.i.d. de distribution de probabilité $\mu_{k-1}^N \, Q_k$

en prenant la somme membre à membre pour $k = 0, 1, \cdots, n$, il vient

$$\sqrt{N} \; \langle \gamma_n^N - \gamma_n, \phi \rangle = \sum_{k=0}^n \sum_{i=1}^N X_{k,i}^N = S_n^N$$

étape 2 (estimations a priori) ▶ pour $k = 0$ et pour tout $i = 1, \cdots, N$, on remarque que

$$\mathbb{E}[X_{0,i}^N \mid \mathcal{F}_{0,i-1}^N] = 0$$

et

$$\mathbb{E}[\,|X_{0,i}^N|^2 \mid \mathcal{F}_{0,i-1}^N] = \frac{1}{N}\,\mathrm{var}(f_0, \eta_0) = V_{0,0}^N$$

avec la convention $\mathcal{F}_{0,0}^N = \{\emptyset, \Omega\}$, et

$$|X_{0,i}^N| \leq \frac{1}{\sqrt{N}}\, 2\,\|f_0\|$$

de sorte que

$$\mathbb{E}[\,|X_{0,i}^N|^3 \mid \mathcal{F}_{0,i-1}^N] \leq \frac{1}{N\sqrt{N}}\, 8\,\|f_0\|^3 = Y_{0,0}^N$$

▶ pour tout $k = 1, \cdots, n$ et pour tout $i = 1, \cdots, N$, on remarque que

$$\mathbb{E}[X_{k,i}^N \mid \mathcal{F}_{k,i-1}^N] = 0$$

et

$$\mathbb{E}[\,|X_{k,i}^N|^2 \mid \mathcal{F}_{k,i-1}^N] = \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle^2 \, \frac{1}{N} \, \mathrm{var}(f_k, \mu_{k-1}^N \, Q_k) = V_{k,0}^N$$

où la variable aléatoire $V_{k,0}^N$ est mesurable par rapport à $\mathcal{H}_{k-1}^N = \mathcal{F}_{k,0}^N$, et

$$|X_{k,i}^N| \leq \frac{\langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle}{\sqrt{N}} \, 2 \, \|f_k\|$$

de sorte que

$$\mathbb{E}[\,|X_{k,i}^N|^3 \mid \mathcal{F}_{k,i-1}^N] \leq \frac{\langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle^3}{N \sqrt{N}} \, 8 \, \|f_k\|^3 = Y_{k,0}^N$$

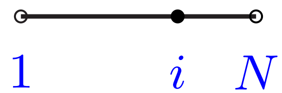
où la variable aléatoire $Y_{k,0}^N$ est mesurable par rapport à $\mathcal{H}_{k-1}^N = \mathcal{F}_{k,0}^N$

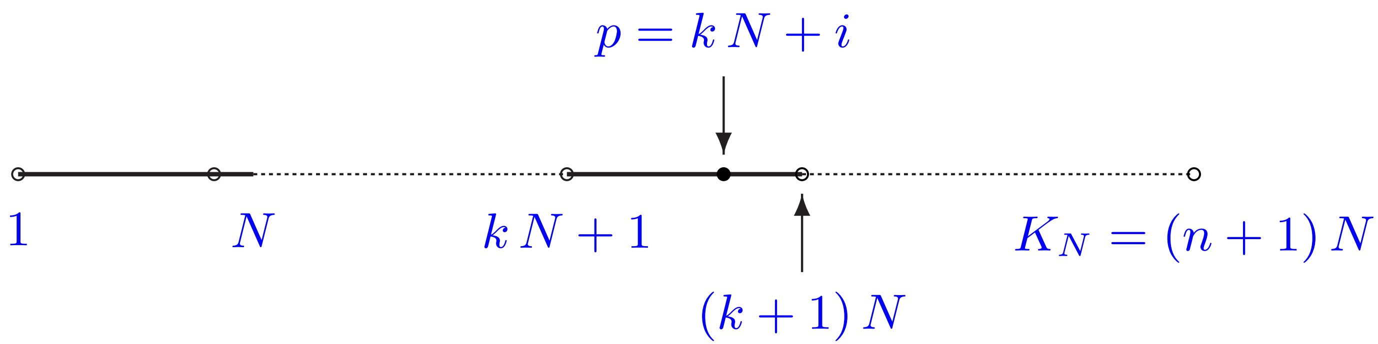
étape 3 (ré–étiquetage) par définition

$$S_n^N = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=1}^{N} X_{k,i}^N$$

est écrit comme une somme double, sur les générations $k = 0, 1, \cdots, n$ et sur les individus $i = 1, \cdots, N$ au sein de chaque génération

k–ème génération





au vu de la figure

l'individu i au sein de la k–ème génération (haut)

peut aussi être vu comme

l'individu p au sein de la population globale (bas)

associé de manière unique à un entier $p = k\,N + i$ compris entre 1 et $K_N = (n+1)\,N$

on ré–écrit donc S_n^N comme une somme unique, de façon à pouvoir utiliser le TCL pour les tableaux triangulaires d'accroissements de martingales : avec ce nouvel étiquetage

$$S_n^N = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=1}^{N} X_{k,i}^N = \sum_{p=1}^{K_N} U_p^N$$

où la variable aléatoire $U_p^N = X_{k,i}^N$ est mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{G}_p^N = \mathcal{F}_{k,i}^N$ pour tout $p = 1, \cdots, K_N$ de la forme $p = k\,N + i$

étape 4 (vérification des conditions) (i) propriété d'accroissement de martingale : il résulte des estimations précédentes que pour tout $p = 1, \cdots, K_N$

$$\mathbb{E}[U_p^N \mid \mathcal{G}_{p-1}^N] = 0$$

(ii) variance asymptotique : il résulte des estimations précédentes que pour tout $p = 1, \cdots, K_N$ de la forme $p = k\,N + i$

$$\mathbb{E}[\,|U_p^N|^2 \mid \mathcal{G}_{p-1}^N] = V_{k,0}^N$$

de sorte que

$$V_n^N = \sum_{p=1}^{K_N} \mathbb{E}[\,|U_p^N|^2 \mid \mathcal{G}_{p-1}^N] = \sum_{k=0}^{n} \sum_{p=k\,N+1}^{(k+1)\,N} \mathbb{E}[\,|U_p^N|^2 \mid \mathcal{G}_{p-1}^N]$$

$$= N \sum_{k=0}^{n} V_{k,0}^N$$

$$= \operatorname{var}(f_0, \eta_0) + \sum_{k=1}^{n} \operatorname{var}(f_k, \mu_{k-1}^N\, Q_k)\, \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle^2$$

compte tenu que $\langle \gamma_{k-1}^N, 1\rangle \rightarrow \langle \gamma_{k-1}, 1\rangle$ et $\mathrm{var}(f_k, \mu_{k-1}^N\, Q_k) \rightarrow \mathrm{var}(f_k, \eta_k)$ en probabilité quand $N \uparrow \infty$, pour tout $k = 1, \cdots, n$, on a

$$\begin{aligned} V_n^N &\longrightarrow \mathrm{var}(f_0, \eta_0) + \sum_{k=1}^n \mathrm{var}(f_k, \eta_k)\, \langle \gamma_{k-1}, 1\rangle^2 \\ &= \mathrm{var}(g_0\, R_{1:n}\, \phi, \eta_0) + \sum_{k=1}^n \mathrm{var}(g_k\, R_{k+1:n}\, \phi, \eta_k)\, \langle \gamma_{k-1}, 1\rangle^2 \\ &= V_n(\phi)\, \langle \gamma_n, 1\rangle^2 \end{aligned}$$

en probabilité quand $N \uparrow \infty$, avec la définition $(\circ)$

(iii) condition de Lindeberg conditionnelle : il résulte des estimations précédentes que pour tout $p = 1, \cdots, K_N$ de la forme $p = k\,N + i$

$$\mathbb{E}[\,|U_p^N|^3 \mid \mathcal{G}_{p-1}^N] = Y_{k,0}^N$$

de sorte que

$$\begin{aligned} Y_n^N = \sum_{p=1}^{K_N} \mathbb{E}[\,|U_p^N|^3 \mid \mathcal{G}_{p-1}^N] &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{p=k\,N+1}^{(k+1)\,N} \mathbb{E}[\,|U_p^N|^3 \mid \mathcal{G}_{p-1}^N] \\ &= N \sum_{k=0}^{n} Y_{k,0}^N \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{N}}\, 8\, [\, \|f_0\|^3 + \sum_{k=1}^{n} \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle^3\, \|f_k\|^3\,] \end{aligned}$$

compte tenu que $\langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle \to \langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle$ en probabilité quand $N \uparrow \infty$, pour tout $k = 1, \cdots, n$, on a $Y_n^N \to 0$ en probabilité quand $N \uparrow \infty$

étape finale   les conditions du TCL pour les accroissements de martingales sont donc vérifiées et on en déduit que

$$S_n^N = \sqrt{N}\ \langle \gamma_n^N - \gamma_n, \phi \rangle \longrightarrow \mathcal{N}(0, V_n(\phi)\ \langle \gamma_n, 1 \rangle^2)$$

ou de manière équivalente

$$\sqrt{N}\ \frac{\langle \gamma_n^N - \gamma_n, \phi \rangle}{\langle \gamma_n, 1 \rangle} \longrightarrow \mathcal{N}(0, V_n(\phi))$$

avec l'expression donnée en $(\circ)$ pour la variance asymptotique, ce qui suffit pour conclure au vu de la Remarque initiale $\square$