

École Nationale Supérieure de Techniques Avancées

filiale Finance Quantitative, 2007–2008

lundi 15 octobre 2007

cours B7–3 (5/5)

Filtrage Bayésien  
et Approximation Particulaire

François Le Gland

IRISA / INRIA Rennes

<http://www.irisa.fr/aspi/legland/ensta/>

# Théorèmes limites pour les approximations particulières

- flots normalisés et non-normalisés
- erreur dans  $\mathbb{L}^p$  pour les approximations particulières
- TCL pour les tableaux triangulaires d'accroissement de martingales
- TCL pour les approximations particulières
- exemple : fonctions de sélection binaires

évolution du flot normalisé (non linéaire) décrite par

$$\mu_{k-1} \longrightarrow \eta_k = \mu_{k-1} Q_k \longrightarrow \mu_k = g_k \cdot \eta_k$$

avec la condition initiale  $\mu_0 = g_0 \cdot \eta_0$ , où la notation  $\cdot$  désigne le produit projectif  
difficulté du problème mesurée par le rapport

$$r_k = \frac{\sup_{x \in E} g_k(x)}{\langle \eta_k, g_k \rangle} \geq 1$$

approximation particulière pondérée

$$\mu_k \approx \mu_k^N = \sum_{i=1}^N w_k^i \delta_{\xi_k^i} \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^N w_k^i = 1$$

de telle sorte que

$$\mu_{k-1}^N \longrightarrow \eta_k^N = S^N(\mu_{k-1}^N Q_k) \longrightarrow \mu_k^N = g_k \cdot \eta_k^N$$

avec la condition initiale  $\mu_0^N = g_0 \cdot \eta_0^N$  et  $\eta_0^N = S^N(\eta_0)$

évolution du flot non normalisé (linéaire)

$$\gamma_k = \gamma_{k-1} R_k = g_k (\gamma_{k-1} Q_k) = g_k (\mu_{k-1} Q_k) \langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle = g_k \eta_k \langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle$$

avec la condition initiale  $\gamma_0 = g_0 \eta_0$  : clairement

$$\langle \gamma_k, 1 \rangle = \langle \eta_k, g_k \rangle \langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle \quad \text{et} \quad \langle \gamma_0, 1 \rangle = \langle \eta_0, g_0 \rangle$$

approximation particulière

$$\gamma_k^N = g_k S^N(\mu_{k-1}^N Q_k) \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle = g_k \eta_k^N \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle$$

avec la condition initiale  $\gamma_0^N = g_0 \eta_0^N$  et  $\eta_0^N = S^N(\eta_0)$  : clairement

$$\langle \gamma_k^N, 1 \rangle = \langle \eta_k^N, g_k \rangle \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle \quad \text{et} \quad \langle \gamma_0^N, 1 \rangle = \langle \eta_0^N, g_0 \rangle$$

et on en déduit que

$$\frac{\gamma_k^N}{\langle \gamma_k^N, 1 \rangle} = g_k \cdot \eta_k^N = \mu_k^N \quad \text{et} \quad \frac{\gamma_0^N}{\langle \gamma_0^N, 1 \rangle} = g_0 \cdot \eta_0^N = \mu_0^N$$

par itération

$$\langle \gamma_n, 1 \rangle = \prod_{k=0}^n \langle \eta_k, g_k \rangle \quad \text{et} \quad \langle \gamma_n^N, 1 \rangle = \prod_{k=0}^n \langle \eta_k^N, g_k \rangle$$

---

 erreur dans  $\mathbb{L}^p$  pour les approximations particulières

**Théorème** pour la constante de normalisation et pour le flot normalisé

$$\mathbb{E} \left| \frac{\langle \gamma_n^N, 1 \rangle}{\langle \gamma_n, 1 \rangle} - 1 \right| \leq z_n^N \quad \text{et} \quad \sup_{\phi: \|\phi\|=1} \mathbb{E} | \langle \mu_n^N - \mu_n, \phi \rangle | \leq 2 z_n^N$$

où la suite  $\{z_k^N\}$  vérifie la récurrence linéaire

$$z_k^N \leq r_k \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{N}} \right) z_{k-1}^N + \frac{r_k}{\sqrt{N}} \quad \text{et} \quad z_0^N \leq \frac{r_0}{\sqrt{N}}$$

estimations similaires dans  $\mathbb{L}^p$  pour tout  $p \geq 1$  (en utilisant les inégalités de Marcinkiewicz–Zygmund)

on rappelle que

$$\mathbb{E} | \langle S^N(\mu) - \mu, \phi \rangle | \leq \{ \mathbb{E} | \langle S^N(\mu) - \mu, \phi \rangle |^2 \}^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{N}} (\text{var}(\phi, \mu))^{1/2}$$

**Remarque** pour toute fonction  $\phi$  mesurable bornée

$$\langle \mu_n^N - \mu_n, \phi \rangle = \frac{\langle \gamma_n^N, \phi \rangle}{\langle \gamma_n^N, 1 \rangle} - \frac{\langle \gamma_n, \phi \rangle}{\langle \gamma_n, 1 \rangle} = \frac{\langle \gamma_n^N - \gamma_n, \phi \rangle}{\langle \gamma_n, 1 \rangle} - \langle \mu_n^N, \phi \rangle \frac{\langle \gamma_n^N - \gamma_n, 1 \rangle}{\langle \gamma_n, 1 \rangle}$$

de sorte que

$$|\langle \mu_n^N - \mu_n, \phi \rangle| \leq \frac{|\langle \gamma_n^N - \gamma_n, \phi \rangle|}{\langle \gamma_n, 1 \rangle} + \|\phi\| \frac{|\langle \gamma_n^N - \gamma_n, 1 \rangle|}{\langle \gamma_n, 1 \rangle}$$

ce qui montre que

$$\sup_{\phi: \|\phi\|=1} \mathbb{E} |\langle \mu_n^N - \mu_n, \phi \rangle| \leq 2 \sup_{\phi: \|\phi\|=1} \mathbb{E} \frac{|\langle \gamma_n^N - \gamma_n, \phi \rangle|}{\langle \gamma_n, 1 \rangle}$$

et pour démontrer le Théorème il suffit donc de prouver que la suite définie par

$$z_k^N = \sup_{\phi: \|\phi\|=1} \mathbb{E} \frac{|\langle \gamma_k^N - \gamma_k, \phi \rangle|}{\langle \gamma_k, 1 \rangle}$$

pour tout  $k = 0, 1, \dots, n$  vérifie la relation de récurrence linéaire

**Preuve du Théorème** ► pour  $k = 0$ , on a

$$\gamma_0^N - \gamma_0 = g_0 (\eta_0^N - \eta_0) \quad \text{de sorte que} \quad \langle \gamma_0^N - \gamma_0, \phi \rangle = \langle \delta_0^N, \phi \rangle$$

pour toute fonction  $\phi$  mesurable bornée, où par définition

$$\delta_0^N = g_0 (\eta_0^N - \eta_0) = g_0 (S^N(\eta_0) - \eta_0)$$

on en déduit que

$$z_0^N = \sup_{\phi: \|\phi\|=1} \mathbb{E} \frac{|\langle \gamma_0^N - \gamma_0, \phi \rangle|}{\langle \gamma_0, 1 \rangle} = \sup_{\phi: \|\phi\|=1} \mathbb{E} \frac{|\langle \delta_0^N, \phi \rangle|}{\langle \gamma_0, 1 \rangle}$$

on remarque que

$$\mathbb{E} |\langle \delta_0^N, \phi \rangle| = \mathbb{E} |\langle S^N(\eta_0) - \eta_0, g_0 \phi \rangle|$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{N}} (\text{var}(g_0 \phi, \eta_0))^{1/2}$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{N}} \sup_{x \in E} g_0(x) \|\phi\|$$

et en divisant par  $\langle \gamma_0, 1 \rangle = \langle \eta_0, g_0 \rangle$  on obtient

$$z_0^N \leq \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{\sup_{x \in E} g_0(x)}{\langle \eta_0, g_0 \rangle} = \frac{r_0}{\sqrt{N}}$$

► pour  $k = 1, \dots, n$ , on a

$$\begin{aligned} \gamma_k^N - \gamma_k &= g_k \eta_k^N \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle - g_k (\gamma_{k-1} Q_k) \\ &= g_k (\gamma_{k-1}^N Q_k - \gamma_{k-1} Q_k) + g_k (\eta_k^N - \mu_{k-1}^N Q_k) \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle \end{aligned}$$

de sorte que

$$\langle \gamma_k^N - \gamma_k, \phi \rangle = \langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1}, Q_k(g_k \phi) \rangle + \langle \delta_k^N, \phi \rangle \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle$$

pour toute fonction  $\phi$  mesurable bornée, où par définition

$$\delta_k^N = g_k (\eta_k^N - \mu_{k-1}^N Q_k) = g_k (S^N(\mu_{k-1}^N Q_k) - \mu_{k-1}^N Q_k)$$

on en déduit que

$$\begin{aligned}
& \sup_{\phi: \|\phi\|=1} \mathbb{E} | \langle \gamma_k^N - \gamma_k, \phi \rangle | \\
& \leq \sup_{\phi: \|\phi\|=1} \mathbb{E} | \langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1}, Q_k(g_k \phi) \rangle | + \sup_{\phi: \|\phi\|=1} \mathbb{E} [ | \langle \delta_k^N, \phi \rangle | \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle ] \\
& \leq \sup_{x \in E} g_k(x) \sup_{\phi: \|\phi\|=1} \mathbb{E} | \langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1}, \phi \rangle | + \sup_{\phi: \|\phi\|=1} \mathbb{E} [ | \langle \delta_k^N, \phi \rangle | \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle ]
\end{aligned}$$

et en divisant par  $\langle \gamma_k, 1 \rangle = \langle \eta_k, g_k \rangle \langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle$  on obtient

$$\begin{aligned}
z_k^N &= \sup_{\phi: \|\phi\|=1} \mathbb{E} \frac{ | \langle \gamma_k^N - \gamma_k, \phi \rangle | }{ \langle \gamma_k, 1 \rangle } \\
&\leq \frac{ \sup_{x \in E} g_k(x) }{ \langle \eta_k, g_k \rangle } \sup_{\phi: \|\phi\|=1} \mathbb{E} \frac{ | \langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1}, \phi \rangle | }{ \langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle } + \sup_{\phi: \|\phi\|=1} \mathbb{E} \frac{ | \langle \delta_k^N, \phi \rangle | \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle }{ \langle \gamma_k, 1 \rangle }
\end{aligned}$$

i.e.

$$z_k^N \leq r_k z_{k-1}^N + \varepsilon_k^N \quad (\star)$$

avec comme terme forçant l'erreur locale définie par

$$\varepsilon_k^N = \sup_{\phi: \|\phi\|=1} \mathbb{E} \frac{|\langle \delta_k^N, \phi \rangle| \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle}{\langle \gamma_k, 1 \rangle}$$

on remarque que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|\langle \delta_k^N, \phi \rangle| \mid \mathcal{H}_{k-1}^N] &= \mathbb{E}[|\langle S^N(\mu_{k-1}^N Q_k) - \mu_{k-1}^N Q_k, g_k \phi \rangle| \mid \mathcal{H}_{k-1}^N] \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{N}} (\text{var}(g_k \phi, \mu_{k-1}^N Q_k))^{1/2} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{N}} \sup_{x \in E} g_k(x) \|\phi\| \end{aligned}$$

où  $\mathcal{H}_{k-1}^N$  dénote la tribu engendrée par le système de particules jusqu'à la  $(k-1)$ -ème génération, de sorte que

$$\mathbb{E}[|\langle \delta_k^N, \phi \rangle| \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle \mid \mathcal{H}_{k-1}^N] \leq \frac{1}{\sqrt{N}} \sup_{x \in E} g_k(x) \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle \|\phi\|$$

et en divisant par  $\langle \gamma_k, 1 \rangle = \langle \gamma_{k-1} Q_k, g_k \rangle = \langle \eta_k, g_k \rangle \langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle$  on obtient

$$\frac{\sup_{x \in E} g_k(x) \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle}{\langle \gamma_k, 1 \rangle} = \frac{\sup_{x \in E} g_k(x)}{\langle \eta_k, g_k \rangle} \frac{\langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle}{\langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle} \leq r_k \left( 1 + \frac{|\langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1}, 1 \rangle|}{\langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle} \right)$$

on en déduit que

$$\varepsilon_k^N \leq \frac{r_k}{\sqrt{N}} \left( 1 + \mathbb{E} \frac{|\langle \gamma_{k-1}^N - \gamma_{k-1}, 1 \rangle|}{\langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle} \right) \leq \frac{r_k}{\sqrt{N}} (1 + z_{k-1}^N)$$

et en reportant cette estimation dans (\*) on obtient

$$z_k^N \leq r_k \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{N}} \right) z_{k-1}^N + \frac{r_k}{\sqrt{N}} \quad \square$$

---

## TCL pour les tableaux triangulaires

pour tout  $N \geq 1$ , soit  $\mathcal{F}^N = \{\mathcal{F}_k^N, k = 1, \dots, K_N\}$  une suite croissante de tribus, et soit  $X^N = \{X_k^N, k = 1, \dots, K_N\}$  une suite adaptée à  $\mathcal{F}^N$  (c'est-à-dire que la v.a.  $X_k^N$  est mesurable par rapport à  $\mathcal{F}_k^N$ , pour tout  $k = 1, \dots, K_N$ )

**Théorème** si

$$\mathbb{E}[X_k^N \mid \mathcal{F}_{k-1}^N] = 0$$

pour tout  $N \geq 1$  et pour tout  $k = 1, \dots, K_N$ , si

$$V_N = \sum_{k=1}^{K_N} \mathbb{E}[|X_k^N|^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}^N] \longrightarrow V$$

en probabilité quand  $N \uparrow \infty$ , et si pour tout  $\varepsilon > 0$

$$F_N(\varepsilon) = \sum_{k=1}^{K_N} \mathbb{E}[1_{(|X_k^N| > \varepsilon)} \mid \mathcal{F}_{k-1}^N] \longrightarrow 0$$

en probabilité quand  $N \uparrow \infty$

alors

$$S_N = \sum_{k=1}^{K_N} X_k^N \implies \mathcal{N}(0, V)$$

en distribution quand  $N \uparrow \infty$

**Remarque** si pour un certain  $d > 0$

$$Y_N = \sum_{k=1}^{K_N} \mathbb{E}[|X_k^N|^{2+d} \mid \mathcal{F}_{k-1}^N] \longrightarrow 0$$

en probabilité quand  $N \uparrow \infty$ , alors la condition de Lindeberg est satisfaite

$$|x|^{2+d} = |x|^{2+d} \mathbf{1}_{(|x| \leq \varepsilon)} + |x|^{2+d} \mathbf{1}_{(|x| > \varepsilon)} \geq \varepsilon^d |x|^2 \mathbf{1}_{(|x| > \varepsilon)}$$

pour tout nombre réel  $x$  et pour tout  $\varepsilon > 0$ , de sorte que

$$F_N(\varepsilon) = \sum_{k=1}^{K_N} \mathbb{E}[\mathbf{1}_{(|X_k^N| > \varepsilon)} |X_k^N|^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}^N] \leq \frac{1}{\varepsilon^d} \sum_{k=1}^{K_N} \mathbb{E}[|X_k^N|^{2+d} \mid \mathcal{F}_{k-1}^N] \longrightarrow 0$$

en probabilité quand  $N \uparrow \infty$

---

**TCL pour les approximations particulières**

**Théorème** pour la constante de normalisation et pour le flot normalisé

$$\sqrt{N} \left[ \frac{\langle \gamma_n^N, 1 \rangle}{\langle \gamma_n, 1 \rangle} - 1 \right] \implies \mathcal{N}(0, V_n) \quad \text{et} \quad \sqrt{N} \langle \mu_n^N - \mu_n, \phi \rangle \implies \mathcal{N}(0, v_n(\phi))$$

en distribution quand  $N \uparrow \infty$ , avec la variance asymptotique définie par

$$V_n = \sum_{k=0}^n \left[ \frac{\langle \eta_k, (g_k R_{k+1:n} 1)^2 \rangle}{\langle \eta_k, g_k R_{k+1:n} 1 \rangle^2} - 1 \right]$$

$$v_n(\phi) = \sum_{k=0}^n \frac{\langle \eta_k, |g_k R_{k+1:n} (\phi - \langle \mu_n, \phi \rangle)|^2 \rangle}{\langle \eta_k, g_k R_{k+1:n} 1 \rangle^2}$$

respectivement, où

$$R_{k+1:n} \phi(x) = R_{k+1} \cdots R_n \phi(x) = \mathbb{E}[\phi(X_n) \prod_{p=k+1}^n g_p(X_p) \mid X_k = x]$$

pour tout  $k = 0, 1, \dots, n$ , avec la convention  $R_{n+1:n} \phi(x) = \phi(x)$

**Remarque** pour démontrer le Théorème, il suffit de démontrer que

$$\sqrt{N} \frac{\langle \gamma_n^N - \gamma_n, \phi \rangle}{\langle \gamma_n, 1 \rangle} \implies \mathcal{N}(0, V_n(\phi))$$

en distribution quand  $N \uparrow \infty$ , avec la variance asymptotique définie par

$$V_n(\phi) \langle \gamma_n, 1 \rangle^2 = \text{var}(g_0 R_{1:n} \phi, \eta_0) + \sum_{k=1}^n \text{var}(g_k R_{k+1:n} \phi, \eta_k) \langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle^2 \quad (\star)$$

ou de manière équivalente par

$$V_n(\phi) = \sum_{k=0}^n \frac{\text{var}(g_k R_{k+1:n} \phi, \eta_k)}{\langle \eta_k, g_k R_{k+1:n} 1 \rangle^2}$$

compte tenu que

$$\langle \gamma_n, 1 \rangle = \langle \gamma_0 R_{1:n}, 1 \rangle = \langle \eta_0, g_0 R_{1:n} 1 \rangle$$

pour  $k = 0$ , et que

$$\langle \gamma_n, 1 \rangle = \langle \gamma_{k-1} R_{k:n}, 1 \rangle = \langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle \langle \eta_k, g_k R_{k+1:n} 1 \rangle$$

pour tout  $k = 1, \dots, n$

on remarque d'abord que

$$V_n = V_n(1) = \sum_{k=0}^n \frac{\text{var}(g_k R_{k+1:n} 1, \eta_k)}{\langle \eta_k, g_k R_{k+1:n} 1 \rangle^2} = \sum_{k=0}^n \left[ \frac{\langle \eta_k, (g_k R_{k+1:n} 1)^2 \rangle}{\langle \eta_k, g_k R_{k+1:n} 1 \rangle^2} - 1 \right]$$

ce qui montre le Théorème pour la constante de normalisation

on remarque aussi que

$$\langle \mu_n^N - \mu_n, \phi \rangle = \left\langle \frac{\gamma_n^N}{\langle \gamma_n^N, 1 \rangle}, \phi - \langle \mu_n, \phi \rangle \right\rangle = \frac{\langle \gamma_n, 1 \rangle}{\langle \gamma_n^N, 1 \rangle} \left\langle \frac{\gamma_n^N - \gamma_n}{\langle \gamma_n, 1 \rangle}, \phi - \langle \mu_n, \phi \rangle \right\rangle$$

pour toute fonction mesurable bornée  $\phi$ , et que  $\langle \gamma_n^N, 1 \rangle \longrightarrow \langle \gamma_n, 1 \rangle$  en probabilité quand  $N \uparrow \infty$ , ce qui montre le Théorème pour le flot normalisé (en utilisant le lemme de Slutsky), avec

$$v_n(\phi) = V_n(\phi - \langle \mu_n, \phi \rangle) = \sum_{k=0}^n \frac{\text{var}(g_k R_{k+1:n} (\phi - \langle \mu_n, \phi \rangle), \eta_k)}{\langle \eta_k, g_k R_{k+1:n} 1 \rangle^2}$$

on remarque finalement que

$$\text{var}(g_k R_{k+1:n} (\phi - \langle \mu_n, \phi \rangle), \eta_k) = \langle \eta_k, |g_k R_{k+1:n} (\phi - \langle \mu_n, \phi \rangle)|^2 \rangle$$

pour tout  $k = 0, 1, \dots, n$ , compte tenu que

$$\langle \eta_0, g_0 R_{1:n} (\phi - \langle \mu_n, \phi \rangle) \rangle = \langle \gamma_0 R_{1:n}, \phi - \langle \mu_n, \phi \rangle \rangle = \langle \gamma_n, \phi - \langle \mu_n, \phi \rangle \rangle = 0$$

pour  $k = 0$ , et que

$$\langle \eta_k, g_k R_{k+1:n} (\phi - \langle \mu_n, \phi \rangle) \rangle = \langle \mu_{k-1} R_{k:n}, \phi - \langle \mu_n, \phi \rangle \rangle = \frac{\langle \gamma_n, \phi - \langle \mu_n, \phi \rangle \rangle}{\langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle} = 0$$

pour tout  $k = 1, \dots, n$

**Remarque** le vecteur aléatoire

$$(\sqrt{N} \left[ \frac{\langle \gamma_n^N, 1 \rangle}{\langle \gamma_n, 1 \rangle} - 1 \right], \sqrt{N} \langle \mu_n^N - \mu_n, \phi_1 \rangle, \dots, \sqrt{N} \langle \mu_n^N - \mu_n, \phi_d \rangle)$$

converge conjointement en distribution quand  $N \uparrow \infty$  vers une limite gaussienne, pour toutes fonctions mesurables bornées  $\phi_1, \dots, \phi_d$  (en utilisant le procédé de Cramér–Wold)

**Preuve du Théorème** pour toute fonction mesurable bornée  $\phi$ , en utilisant une somme télescopique et la relation

$$\gamma_k^N = g_k \eta_k^N \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle$$

pour tout  $k = 1, \dots, n$ , on obtient la décomposition suivante

$$\begin{aligned} \langle \gamma_n^N - \gamma_n, \phi \rangle &= \sum_{k=1}^n \langle \gamma_k^N - \gamma_{k-1}^N R_k, R_{k+1:n} \phi \rangle + \langle \gamma_0^N - \gamma_0, R_{1:n} \phi \rangle \\ &= \sum_{k=1}^n \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle \langle g_k (\eta_k^N - \mu_{k-1}^N Q_k), R_{k+1:n} \phi \rangle + \langle g_0 (\eta_0^N - \eta_0), R_{1:n} \phi \rangle \\ &= \sum_{k=1}^n \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle \langle \eta_k^N - \mu_{k-1}^N Q_k, f_k \rangle + \langle \eta_0^N - \eta_0, f_0 \rangle \end{aligned}$$

où la collection  $f = (f_0, f_1, \dots, f_n)$  de fonctions mesurables bornées est définie par

$$f_k(x) = g_k(x) R_{k+1:n} \phi(x)$$

pour tout  $k = 0, 1, \dots, n$ , avec la convention  $R_{n+1:n} \phi(x) = \phi(x)$

**étape 1 (décomposition)** ► pour  $k = 0$ , on remarque que

$$\langle \eta_0^N - \eta_0, f_0 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [f_0(\xi_0^i) - \langle \eta_0, f_0 \rangle] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N X_{0,i}^N$$

avec par définition

$$X_{0,i}^N = \frac{1}{\sqrt{N}} [f_0(\xi_0^i) - \langle \eta_0, f_0 \rangle]$$

pour tout  $i = 1, \dots, N$ , où les variables aléatoires  $\xi_0^1, \dots, \xi_0^N$  sont i.i.d. de distribution de probabilité  $\eta_0$

► pour tout  $k = 1, \dots, n$ , on remarque que

$$\begin{aligned} \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle \langle \eta_k^N - \mu_{k-1}^N Q_k, f_k \rangle &= \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [f_k(\xi_k^i) - \langle \mu_{k-1}^N Q_k, f_k \rangle] \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N X_{k,i}^N \end{aligned}$$

avec par définition

$$X_{k,i}^N = \frac{\langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle}{\sqrt{N}} [f_k(\xi_k^i) - \langle \mu_{k-1}^N Q_k, f_k \rangle]$$

pour tout  $i = 1, \dots, N$ , où conditionnellement par rapport à la tribu  $\mathcal{H}_{k-1}^N$  engendrée par le système de particules jusqu'à la  $(k-1)$ -ème génération, les variables aléatoires  $\xi_k^1, \dots, \xi_k^N$  sont i.i.d. de distribution de probabilité  $\mu_{k-1}^N Q_k$  en prenant la somme membre à membre pour  $k = 0, 1, \dots, n$ , il vient

$$\sqrt{N} \langle \gamma_n^N - \gamma_n, \phi \rangle = \sum_{k=0}^n \sum_{i=1}^N X_{k,i}^N = S_n^N$$

**étape 2 (estimations)** ► pour  $k = 0$  et pour tout  $i = 1, \dots, N$ , on remarque que

$$\mathbb{E}[X_{0,i}^N \mid \mathcal{F}_{0,i-1}^N] = 0$$

et

$$\mathbb{E}[|X_{0,i}^N|^2 \mid \mathcal{F}_{0,i-1}^N] = \frac{1}{N} \text{var}(f_0, \eta_0) = V_{0,0}^N$$

avec la convention  $\mathcal{F}_{0,0}^N = \{\emptyset, \Omega\}$ , et

$$|X_{0,i}^N| \leq \frac{1}{\sqrt{N}} 2 \|f_0\|$$

de sorte que

$$\mathbb{E}[|X_{0,i}^N|^3 \mid \mathcal{F}_{0,i-1}^N] \leq \frac{1}{N\sqrt{N}} 8 \|f_0\|^3 = Y_{0,0}^N$$

► pour tout  $k = 1, \dots, n$  et pour tout  $i = 1, \dots, N$ , on remarque que

$$\mathbb{E}[X_{k,i}^N \mid \mathcal{F}_{k,i-1}^N] = 0$$

et

$$\mathbb{E}[|X_{k,i}^N|^2 \mid \mathcal{F}_{k,i-1}^N] = \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle^2 \frac{1}{N} \text{var}(f_k, \mu_{k-1}^N Q_k) = V_{k,0}^N$$

où la variable aléatoire  $V_{k,0}^N$  est mesurable par rapport à  $\mathcal{H}_{k-1}^N = \mathcal{F}_{k,0}^N$ , et

$$|X_{k,i}^N| \leq \frac{\langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle}{\sqrt{N}} 2 \|f_k\|$$

de sorte que

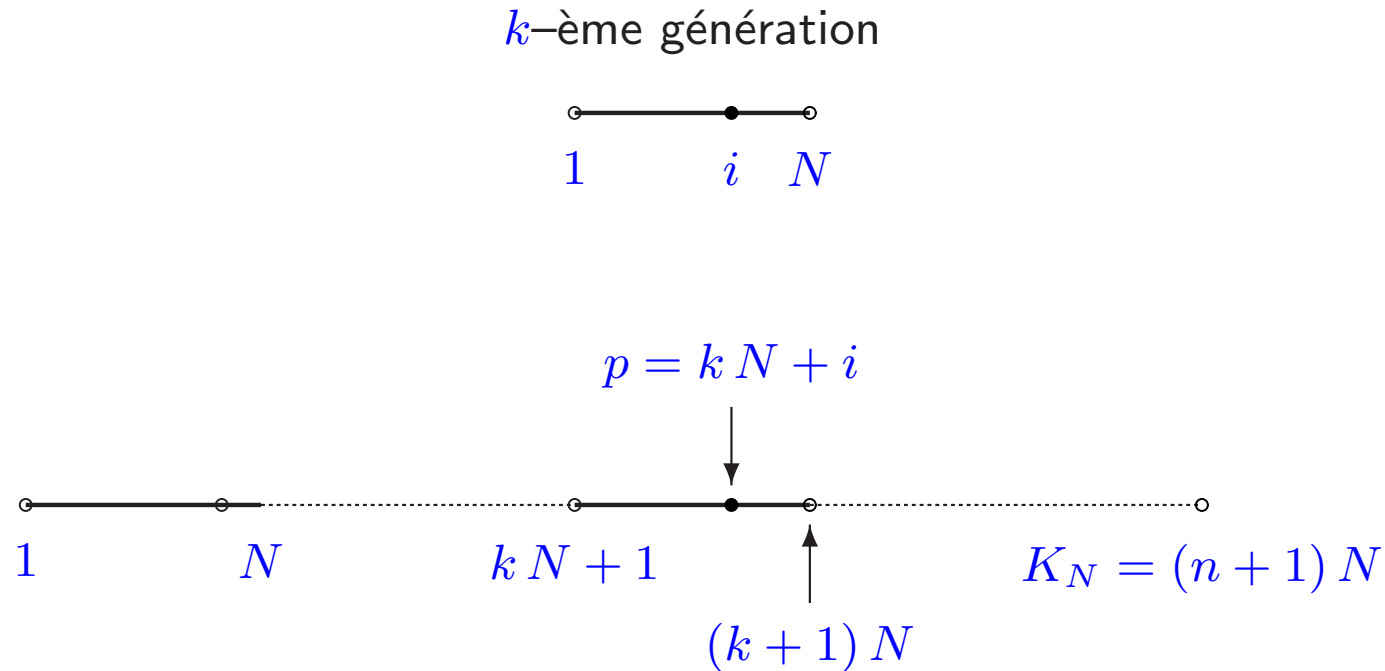
$$\mathbb{E}[|X_{k,i}^N|^3 \mid \mathcal{F}_{k,i-1}^N] \leq \frac{\langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle^3}{N\sqrt{N}} 8 \|f_k\|^3 = Y_{k,0}^N$$

où la variable aléatoire  $Y_{k,0}^N$  est mesurable par rapport à  $\mathcal{H}_{k-1}^N = \mathcal{F}_{k,0}^N$

**étape 3 (ré-étiquetage)** par définition

$$S_n^N = \sum_{k=0}^n \sum_{i=1}^N X_{k,i}^N$$

est écrit comme une somme double, sur les générations  $k = 0, 1, \dots, n$  et sur les individus  $i = 1, \dots, N$  au sein de chaque génération



au vu de la figure

l'individu  $i$  au sein de la  $k$ -ème génération (haut)

peut aussi être vu comme

l'individu  $p$  au sein de la population globale (bas)

associé de manière unique à un entier  $p = kN + i$  compris entre 1 et  $K_N = (n + 1)N$

on ré-écrit donc  $S_n^N$  comme une somme unique, de façon à pouvoir utiliser le TCL pour les tableaux triangulaires d'accroissements de martingales : avec ce nouvel étiquetage

$$S_n^N = \sum_{k=0}^n \sum_{i=1}^N X_{k,i}^N = \sum_{p=1}^{K_N} U_p^N$$

où la variable aléatoire  $U_p^N = X_{k,i}^N$  est mesurable par rapport à la tribu  $\mathcal{G}_p^N = \mathcal{F}_{k,i}^N$  pour tout  $p = 1, \dots, K_N$  de la forme  $p = kN + i$

**étape 4 (vérification des conditions)** (i) propriété d'accroissement de martingale : il résulte des estimations précédentes que pour tout  $p = 1, \dots, K_N$

$$\mathbb{E}[U_p^N \mid \mathcal{G}_{p-1}^N] = 0$$

(ii) variance asymptotique : il résulte des estimations précédentes que pour tout  $p = 1, \dots, K_N$  de la forme  $p = kN + i$

$$\mathbb{E}[|U_p^N|^2 \mid \mathcal{G}_{p-1}^N] = V_{k,0}^N$$

de sorte que

$$\begin{aligned} V_n^N &= \sum_{p=1}^{K_N} \mathbb{E}[|U_p^N|^2 \mid \mathcal{G}_{p-1}^N] = \sum_{k=0}^n \sum_{p=kN+1}^{(k+1)N} \mathbb{E}[|U_p^N|^2 \mid \mathcal{G}_{p-1}^N] \\ &= N \sum_{k=0}^n V_{k,0}^N \\ &= \text{var}(f_0, \eta_0) + \sum_{k=1}^n \text{var}(f_k, \mu_{k-1}^N Q_k) \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle^2 \end{aligned}$$

compte tenu que  $\langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle \rightarrow \langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle$  et  $\text{var}(f_k, \mu_{k-1}^N Q_k) \rightarrow \text{var}(f_k, \eta_k)$  en probabilité quand  $N \uparrow \infty$ , pour tout  $k = 1, \dots, n$ , on a

$$\begin{aligned}
 V_n^N &\longrightarrow \text{var}(f_0, \eta_0) + \sum_{k=1}^n \text{var}(f_k, \eta_k) \langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle^2 \\
 &= \text{var}(g_0 R_{1:n} \phi, \eta_0) + \sum_{k=1}^n \text{var}(g_k R_{k+1:n} \phi, \eta_k) \langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle^2 \\
 &= V_n(\phi) \langle \gamma_n, 1 \rangle^2
 \end{aligned}$$

en probabilité quand  $N \uparrow \infty$ , avec la définition  $(\star)$

(iii) condition de Lindeberg conditionnelle : il résulte des estimations précédentes que pour tout  $p = 1, \dots, K_N$  de la forme  $p = kN + i$

$$\mathbb{E}[|U_p^N|^3 \mid \mathcal{G}_{p-1}^N] = Y_{k,0}^N$$

de sorte que

$$\begin{aligned} Y_n^N &= \sum_{p=1}^{K_N} \mathbb{E}[|U_p^N|^3 \mid \mathcal{G}_{p-1}^N] = \sum_{k=0}^n \sum_{p=kN+1}^{(k+1)N} \mathbb{E}[|U_p^N|^3 \mid \mathcal{G}_{p-1}^N] \\ &= N \sum_{k=0}^n Y_{k,0}^N \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{N}} \delta \left[ \|f_0\|^3 + \sum_{k=1}^n \langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle^3 \|f_k\|^3 \right] \end{aligned}$$

compte tenu que  $\langle \gamma_{k-1}^N, 1 \rangle \rightarrow \langle \gamma_{k-1}, 1 \rangle$  en probabilité quand  $N \uparrow \infty$ , pour tout  $k = 1, \dots, n$ , on a  $Y_n^N \rightarrow 0$  en probabilité quand  $N \uparrow \infty$

**étape finale** les conditions du TCL pour les accroissements de martingales sont donc vérifiées et on en déduit que

$$S_n^N = \sqrt{N} \langle \gamma_n^N - \gamma_n, \phi \rangle \longrightarrow \mathcal{N}(0, V_n(\phi) \langle \gamma_n, 1 \rangle^2)$$

ou de manière équivalente

$$\sqrt{N} \frac{\langle \gamma_n^N - \gamma_n, \phi \rangle}{\langle \gamma_n, 1 \rangle} \longrightarrow \mathcal{N}(0, V_n(\phi))$$

avec l'expression donnée en (★) pour la variance asymptotique, ce qui suffit pour conclure au vu de la Remarque initiale □

---

**exemple : fonctions de sélection binaires**

dans le cas particulier des fonctions de sélection binaires (prenant seulement la valeur 0/1), i.e. des fonctions indicatrices  $g_k(x) = 1_{(x \in A_k)}$ , on a

$$p_0 = \mathbb{P}[X_0 \in A_0] = \langle \eta_0, g_0 \rangle \quad \text{et} \quad p_k = \mathbb{P}[X_k \in A_k \mid X_{k-1} \in A_{k-1}] = \langle \eta_k, g_k \rangle$$

pour tout  $k = 1, \dots, n$ , et

$$P_n = \mathbb{P}[X_0 \in A_0, \dots, X_n \in A_n] = \prod_{k=0}^n \langle \eta_k, g_k \rangle \approx \prod_{k=0}^n \langle \eta_k^N, g_k \rangle = \prod_{k=0}^n \frac{|I_k^N|}{N} = P_n^N$$

où

$$I_k^N = \{i = 1 \dots N : g_k(\xi_k^i) = 1\} = \{i = 1 \dots N : \xi_k^i \in A_k\}$$

et

$$\begin{aligned} R_{k+1:n} 1(x) &= \mathbb{E}\left[ \prod_{p=k+1}^n g_p(X_p) \mid X_k = x \right] \\ &= \mathbb{P}[X_{k+1} \in A_{k+1}, \dots, X_n \in A_n \mid X_k = x] \end{aligned}$$

pour tout  $k = 0, 1, \dots, n$ , avec la convention  $R_{n+1:n} 1(x) = 1$

il résulte du TCL démontré dans le cas général que

$$\sqrt{N} \left( \frac{P_n^N}{P_n} - 1 \right) \Longrightarrow \mathcal{N}(0, V_n)$$

en distribution quand  $N \uparrow \infty$ , avec la variance asymptotique

$$V_n = \sum_{k=0}^n \frac{\text{var}(g_k R_{k+1:n} 1, \eta_k)}{\langle \eta_k, g_k R_{k+1:n} 1 \rangle^2} = \sum_{k=0}^n \left( \frac{1}{p_k} - 1 \right) + \sum_{k=0}^n \frac{1}{p_k} \frac{\text{var}(R_{k+1:n} 1, \mu_k)}{\langle \mu_k, R_{k+1:n} 1 \rangle^2}$$

en effet, compte tenu que  $g_k^2 = g_k$ , on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\text{var}(g_k R_{k+1:n} 1, \eta_k)}{\langle \eta_k, g_k R_{k+1:n} 1 \rangle^2} &= \frac{\langle \eta_k, g_k |R_{k+1:n} 1|^2 \rangle}{\langle \eta_k, g_k R_{k+1:n} 1 \rangle^2} - 1 \\ &= \frac{1}{p_k} \frac{\langle \mu_k, |R_{k+1:n} 1|^2 \rangle}{\langle \mu_k, R_{k+1:n} 1 \rangle^2} - 1 \\ &= \left( \frac{1}{p_k} - 1 \right) + \frac{1}{p_k} \left[ \frac{\langle \mu_k, |R_{k+1:n} 1|^2 \rangle}{\langle \mu_k, R_{k+1:n} 1 \rangle^2} - 1 \right] \end{aligned}$$

pour tout  $k = 0, 1, \dots, n$