

# Parcimonie structurée en traitement du signal

B. Torrèsani

LATP, Université de Provence, Marseille, France

Journées STAR, Octobre 2009

Introduction

Motivation :  
sons et signaux  
musicaux  
Dictionnaires  
pour les sons

Régression  
parcimo-  
nieuse et  
structurée

Formulations  
variationnelles  
Modélisation  
probabiliste  
Coefficients  
d'analyse

Illustrations  
numériques

Conclusions,  
perspectives



# Plan de l'exposé

## Introduction

Motivation : sons et signaux musicaux  
Dictionnaires pour les sons

## Régression parcimonieuse et structurée

Formulations variationnelles  
Modélisation probabiliste  
Coefficients d'analyse

## Illustrations numériques

## Conclusions, perspectives

Introduction

Motivation :  
sons et signaux  
musicaux  
Dictionnaires  
pour les sons

Régression  
parcimo-  
nieuse et  
structurée

Formulations  
variationnelles  
Modélisation  
probabiliste  
Coefficients  
d'analyse

Illustrations  
numériques

Conclusions,  
perspectives



# Représentations parcimonieuses des sons

Les sons sont connus pour être représentés de façon efficace dans le domaine conjoint temps-fréquence. Les deux caractéristiques essentielles de ce type de représentations sont

- ▶ **La Parcimonie** : la grande majorité des coefficients sont numériquement négligeables.
- ▶ **La Persistance** : les coefficients significatifs ont tendance à former des groupes connexes (voire plus complexes).

C'est essentiellement une conséquence du processus de production des sons, souvent via des systèmes résonants.

On se ramène souvent à des décompositions en sommes d'*objets macroscopiques* :

- ▶ sinusoïdes (décroissantes, modulées,...)
- ▶ transitoires (très localisées temporellement)
- ▶ composantes « stochastiques »

Introduction

Motivation : sons et signaux musicaux

Dictionnaires pour les sons

Régression parcimonieuse et structurée

Formulations variationnelles

Modélisation probabiliste

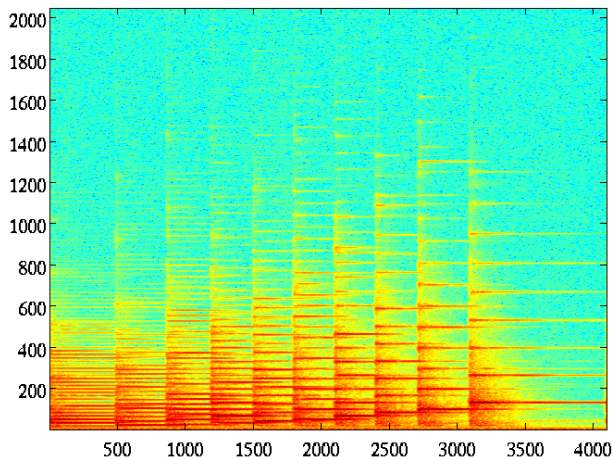
Coefficients d'analyse

Illustrations numériques

Conclusions, perspectives



# Un arpège au piano



Coefficients de la décomposition d'une séquence de piano  
sur une base temps-fréquence

Introduction

Motivation :  
sons et signaux  
musicaux

Dictionnaires  
pour les sons

Régression  
parcimonieuse et  
structurée

Formulations  
variationnelles

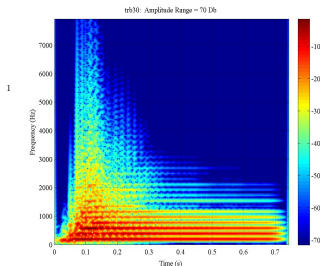
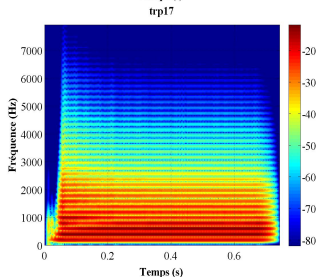
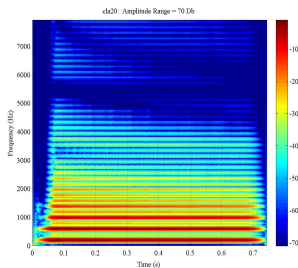
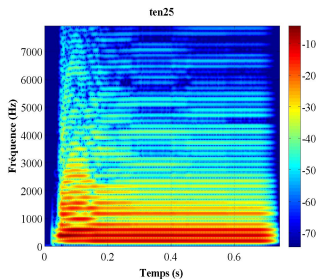
Modélisation  
probabiliste  
Coefficients  
d'analyse

Illustrations  
numériques

Conclusions,  
perspectives



# La même note jouée par quatre instruments différents



Introduction

Motivation :  
sons et signaux  
musicaux

Dictionnaires  
pour les sons

Régression  
parcimonieuse et  
structurée

Formulations  
variationnelles

Modélisation  
probabiliste  
Coefficients  
d'analyse

Illustrations  
numériques

Conclusions,  
perspectives

La physique peut être partiellement lue sur ces images.



**Dictionnaire** : ensemble (sur)complet  $\mathcal{D} = \{\varphi_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$  de vecteurs  $\varphi_\lambda \in \mathcal{H}$  dans un espace de Hilbert de référence. Dans le cas surcomplet, tout signal  $x \in \mathcal{H}$  admet une infinité de décompositions sur  $\mathcal{D}$

$$x = \sum_{\lambda \in \Lambda} \alpha_\lambda \varphi_\lambda$$

les coefficients  $\alpha_\lambda$  étant les coefficients de synthèse (généralement différents des coefficients d'analyse  $a_\lambda = \langle x, \varphi_\lambda \rangle$ ).

**Exemple** : union de deux bases orthonormées : permet des décompositions “multi-couches”.

Introduction

Motivation : sons et signaux musicaux

Dictionnaires pour les sons

Régression parcimonieuse et structurée

Formulations variationnelles

Modélisation probabiliste

Coefficients d'analyse

Illustrations numériques

Conclusions, perspectives



# Dictionnaires

Les objets macroscopiques mentionnés plus haut ne peuvent pas être utilisés comme atomes pour générer un dictionnaire :

- ▶ trop longs
- ▶ trop de variabilité intrinsèque

**Alternative** : modélisation comme **molécules**, i.e. des combinaisons linéaires (aléatoires) d'atomes d'un dictionnaire temps-fréquence

$$x = \sum_{\lambda \in \Lambda} \alpha_{\lambda} \varphi_{\lambda} + r ,$$

où

- ▶ les coefficients de synthèse  $\alpha_{\lambda}$  sont des variables dépendantes.
- ▶  $r$  est un résidu, pas nécessairement parcimonieux (souvent modélisé par un bruit blanc Gaussien centré).

Introduction

Motivation : sons et signaux musicaux

Dictionnaires pour les sons

Régression parcimonieuse et structurée

Formulations variationnelles

Modélisation probabiliste

Coefficients d'analyse

Illustrations numériques

Conclusions, perspectives



# Dictionnaires stratifiés

Pour modéliser les dépendances : l'index  $\Lambda$  peut être équipé d'une *structure*, qui peut prendre diverses formes, par exemple

- ▶ Une **hiérarchie**, ou **stratification**, définie en termes de *groupes* et *membres* : un indice est en fait un couple  $\lambda = (g, m)$ , où  $g$  numérote les groupes, et  $m$  les membres d'un groupe. Les coefficients membres d'un même groupe sont statistiquement dépendants, avec indépendance des groupes.
- ▶ Un **système de voisinages**, associant à chaque  $\lambda$  un voisinage, les coefficients voisins étant dépendants.

Introduction

Motivation : sons et signaux musicaux

Dictionnaires pour les sons

Régression parcimonieuse et structurée

Formulations variationnelles

Modélisation probabiliste  
Coefficients d'analyse

Illustrations numériques

Conclusions, perspectives



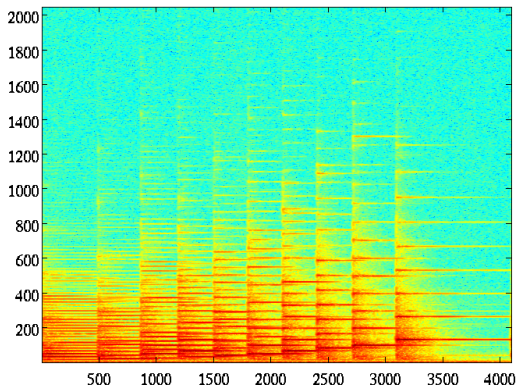


# Dictionnaires stratifiés

**Exemple** : repère de Gabor de  $\mathbb{C}^N$

$$\varphi_{kl}[n]t = e^{2i\pi k\nu_0(n-lb_0)}\varphi[n-lb_0],$$

$(k = 0, \dots, K - 1, l = 0 \dots L - 1)$ ,  $\varphi$  étant une fenêtre, avec  
 $g = k, \dots$  ou  $g = l, \dots$  ou les deux ?



Introduction

Motivation :  
sons et signaux  
musicaux

Dictionnaires  
pour les sons

Régression  
parcimonieuse et  
structurée

Formulations  
variationnelles

Modélisation  
probabiliste  
Coefficients  
d'analyse

Illustrations  
numériques

Conclusions,  
perspectives



# Dictionnaires stratifiés

Exemple : union de bases MDCT :  $\mathcal{D} = \Psi^1 \cup \Psi^2$ , avec  
 $\Psi^j = \{\psi_{\tau\nu}^j\}$ , et

$$\psi_{\tau\nu}^j[n] = w^j[n - \tau l_j] \cos\left(\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \frac{n - \tau l_j}{l_j}\right)$$

avec résolutions temps-fréquence différentes, définies par les fenêtres  $w^j$ .

Stratification :

- ▶  $j = 1$  : grande fenêtre (bonne résolution fréquentielle, faible résolution temporelle, adaptée aux composantes tonales),  $g = \nu$  and  $m = \tau$ .
- ▶  $j = 2$  : fenêtre étroite (bonne résolution temporelle, faible résolution fréquentielle, adaptée aux composantes transitoires),  $g = \tau$  and  $m = \nu$ .

Introduction

Motivation : sons et signaux musicaux

Dictionnaires pour les sons

Régression parcimonieuse et structurée

Formulations variationnelles

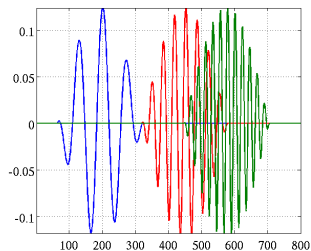
Modélisation probabiliste  
Coefficients d'analyse

Illustrations numériques

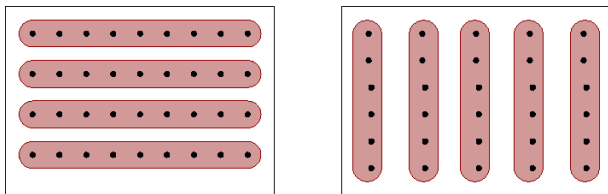
Conclusions, perspectives



# MDCT : fonctions de base et hiérarchies



Trois fonctions d'une base MDCT



Deux stratifications naturelles des bases MDCT

Introduction

Motivation :  
sons et signaux  
musicaux

Dictionnaires  
pour les sons

Régression  
parcimonieuse et  
structurée

Formulations  
variationnelles

Modélisation  
probabiliste  
Coefficients  
d'analyse

Illustrations  
numériques

Conclusions,  
perspectives



# Plan de l'exposé

## Introduction

Motivation : sons et signaux musicaux  
Dictionnaires pour les sons

## Régression parcimonieuse et structurée

Formulations variationnelles  
Modélisation probabiliste  
Coefficients d'analyse

## Illustrations numériques

## Conclusions, perspectives

### Introduction

Motivation : sons et signaux musicaux  
Dictionnaires pour les sons

### Régression parcimonieuse et structurée

Formulations variationnelles  
Modélisation probabiliste  
Coefficients d'analyse

### Illustrations numériques

Conclusions, perspectives



# Régression parcimonieuse

Si le dictionnaire est surcomplet, la décomposition du signal n'est pas unique

$$x = \sum_{\lambda} \alpha_{\lambda} \varphi_{\lambda}$$

**Exemple :** union de deux bases orthonormées  $\mathcal{D} = \Psi^1 \cup \Psi^2$  :

$$x = \psi_{\ell}^1 = \sum_{\ell'} \langle \psi_{\ell}^1, \psi_{\ell'}^2 \rangle \psi_{\ell'}^2 = \frac{1}{2} \psi_{\ell}^1 + \frac{1}{2} \sum_{\ell'} \langle \psi_{\ell}^1, \psi_{\ell'}^2 \rangle \psi_{\ell'}^2 .$$

Pour favoriser la représentation  $x = \psi_{\ell}^1$  :

- ▶ Formulation variationnelle, favorisant la parcimonie
- ▶ Modélisation probabiliste explicite ; algorithme tenant compte des corrélations entre les deux bases, et attribuant à chacune ce qui lui revient de droit.

Pour mettre en oeuvre la stratification : idem

Introduction

Motivation : sons et signaux musicaux

Dictionnaires pour les sons

Régression parcimonieuse et structurée

Formulations variationnelles

Modélisation probabiliste

Coefficients d'analyse

Illustrations numériques

Conclusions, perspectives



# Régression LASSO et ISTA

Dans les formulations variationnelles, la parcimonie est généralement mise en oeuvre via la **régression LASSO**, ou **Basis Pursuit Denoising**

$$\min_{\underline{\alpha}} \left[ \frac{1}{2} \left\| x - \sum_{\lambda} \alpha_{\lambda} \varphi_{\lambda} \right\|^2 + \mu \sum_{\lambda} |\alpha_{\lambda}| \right]$$

qui peut être résolue de différentes façons, par exemple les algorithmes de seuillages doux itératifs (ISTA), basés sur

$$\mathbb{S}_{\mu}(x) = e^{j\arg(x)} (|x| - \mu)^+$$

Introduction

Motivation : sons et signaux musicaux

Dictionnaires pour les sons

Régression parcimonieuse et structurée

Formulations variationnelles

Modélisation probabiliste  
Coefficients d'analyse

Illustrations numériques

Conclusions, perspectives



## Régression LASSO et ISTA (2)

- ▶ Si  $\mathcal{D}$  est une base orthonormale :  $\alpha_\lambda = \mathbb{S}_\mu(\langle x, \varphi_\lambda \rangle)$
- ▶ Si  $\mathcal{D}$  est une union de deux (ou plus) bases orthonormées, on a recours à l'algorithme BCR (Sardy, Bruce & Tseng 2000) : optimisation itérative des différentes bases, les coefficients par rapport à toutes les autres restant fixés,
- ▶ Cas général : seuillages itératifs de Landweber

$$\alpha_\lambda^{(n+1)} = \mathbb{S}_\mu \left( \alpha_\lambda^{(n)} + \frac{1}{C} \left\langle x - \sum_{\lambda'} \alpha_{\lambda'}^{(n)} \varphi_{\lambda'}, \varphi_\lambda \right\rangle \right)$$

(propriétés de convergence prouvées par Daubechies, DeFrise & DeMol 2002)

Introduction

Motivation :  
sons et signaux  
musicaux  
Dictionnaires  
pour les sons

Régression  
parcimonieuse et  
structurée

Formulations  
variationnelles  
Modélisation  
probabiliste  
Coefficients  
d'analyse

Illustrations  
numériques

Conclusions,  
perspectives



# Régression group-LASSO et ISGTA

La **stratification** peut également être implémentée dans des approches variationnelles, via des normes mixtes

$$\min_{\underline{\alpha}} \left[ \left\| x - \sum_g \sum_m \alpha_{gm} \varphi_{gm} \right\|^2 + \sum_g \mu_g \sqrt{\sum_m |\alpha_{gm}|^2} \right]$$

Là encore, des algorithmes de seuillage doux par groupe, avec un opérateur de seuillage adapté, sont une réponse appropriée au problème :

$$\mathbb{S}_{\mu_g}^G(\alpha_{gm}) = \alpha_{gm} \left( 1 - \frac{\mu_g}{\|\underline{\alpha}_g\|_2} \right)^+$$

**Remarque :** seuillage (ou rétrécissement) par comparaison de la norme  $\|\underline{\alpha}_g\|_2$  à un seuil.

Introduction

Motivation : sons et signaux musicaux  
Dictionnaires pour les sons

Régression parcimonieuse et structurée

Formulations variationnelles  
Modélisation probabiliste  
Coefficients d'analyse

Illustrations numériques

Conclusions, perspectives





## Régression Group-LASSO et ISTGA (2)

- ▶ Si  $\mathcal{D}$  est une base orthonormale :  $\alpha_{gm} = \mathbb{S}_{\mu_g}^G(\langle x, \varphi_{gm} \rangle)$
- ▶ Si  $\mathcal{D}$  est une union de deux (ou plus) bases orthonormées : algorithme BCR (Kowalski & BT 2008)
- ▶ Cas général : seuillages itératifs de Landweber généralisés

$$\alpha_{gm}^{(n+1)} = \mathbb{S}_{\mu_g}^G \left( \alpha_{gm}^{(n)} + \frac{1}{C} \left\langle x - \sum_{g'm'} \alpha_{g'm'}^{(n)} \varphi_{g'm'}, \varphi_{gm} \right\rangle \right)$$

Convergence analysée dans (Kowalski 2009)

Introduction

Motivation : sons et signaux musicaux

Dictionnaires pour les sons

Régression parcimonieuse et structurée

Formulations variationnelles

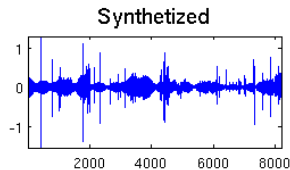
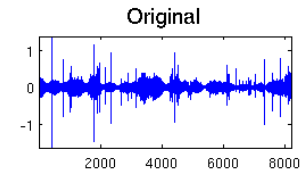
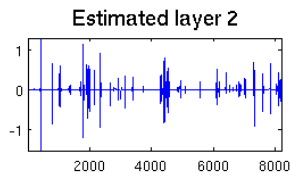
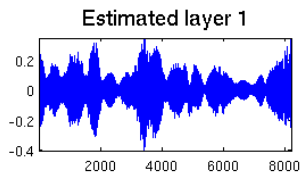
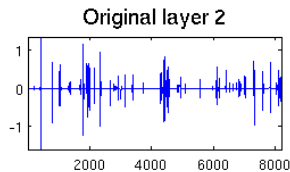
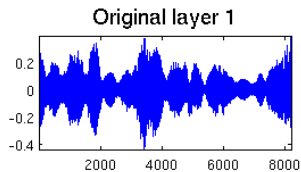
Modélisation probabiliste  
Coefficients d'analyse

Illustrations numériques

Conclusions, perspectives



# ISTA et ISTGA : exemple de l'union de deux bases



Introduction

Motivation :  
sons et signaux  
musicaux  
Dictionnaires  
pour les sons

Régression  
parcimonieuse et  
structurée

Formulations  
variationnelles  
Modélisation  
probabiliste  
Coefficients  
d'analyse

Illustrations  
numériques

Conclusions,  
perspectives



# ISTA et ISTGA : cas de l'union de deux bases

Pour  $\mathcal{D} = \Psi^1 \cup \Psi^2$ , le problème Group-LASSO simplifié devient

$$\min_{\underline{\alpha}} \left[ \left\| x - \sum_{g,m} \alpha_{gm}^1 \psi_{gm}^1 - \sum_{g,m} \alpha_{gm}^2 \psi_{gm}^2 \right\|^2 + \mu_1 \sum_g \sqrt{\sum_m |\alpha_{gm}^1|^2} + \mu_2 \sum_g \sqrt{\sum_m |\alpha_{gm}^2|^2} \right]$$

- ▶ Pour LASSO, l'ajustement du paramètre de régularisation est souvent complexe
- ▶ Ici, il y en a deux à régler :  $\mu_1, \mu_2 \dots$

**Alternative** : inclure les paramètres de régularisation dans le modèle : modèles hiérarchiques.

Introduction

Motivation : sons et signaux musicaux  
Dictionnaires pour les sons

Régression parcimonieuse et structurée

Formulations variationnelles  
Modélisation probabiliste  
Coefficients d'analyse

Illustrations numériques

Conclusions, perspectives

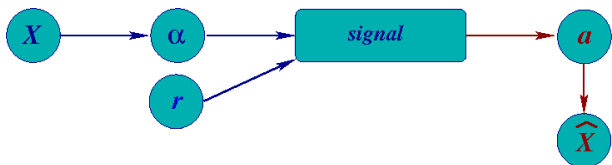


## Modèle hiérarchique

Introduire un état caché  $\mathbf{X}$ , qui conditionne les distributions des coefficients de synthèse :

$$x = \sum_{\lambda} \alpha_{\lambda} \varphi_{\lambda} + r$$

où les coefficients de synthèse  $\alpha_{\lambda}$  forment un vecteur aléatoire, dont la distribution est gouvernée par  $\mathbf{X} = \{X_{\lambda}\}$  (appelé **carte de signficance**), et  $r$  est un résidu, modélisé comme bruit blanc Gaussien centré et de variance connue  $\vartheta^2$ .



**Stratégie** : identifier les états cachés à partir des coefficients d'analyse  $a_{\lambda} = \langle x, \varphi_{\lambda} \rangle$ .

Introduction

Motivation : sons et signaux musicaux  
Dictionnaires pour les sons

Régression parcimonieuse et structurée

Formulations variationnelles  
Modélisation probabiliste  
Coefficients d'analyse

Illustrations numériques

Conclusions, perspectives



## Définition

Etant donné un dictionnaire  $\mathcal{D} = \{\varphi_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$  de l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ , un modèle hiérarchique harmonique est défini par la donnée de

1. Un modèle discret pour la carte de signifiante. On note  $\mathbb{P}_{\mathbf{X}}$  la mesure de probabilités pour la carte  $\mathbf{X}$ , et par  $\mathbb{E}_{\mathbf{X}}$  l'espérance correspondante.
2. Un modèle conditionnel pour les coefficients de synthèse  $\{\alpha_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ , sachant la carte de signifiante  $\mathbf{X}$ . On note  $\mathbb{P}_0$  et  $\mathbb{E}_0$  les probabilités et espérances correspondantes.

Introduction

Motivation : sons et signaux musicaux

Dictionnaires pour les sons

Régression parcimonieuse et structurée

Formulations variationnelles

Modélisation probabiliste

Coefficients d'analyse

Illustrations numériques

Conclusions, perspectives



# Filtrage et lissage

**Problème** : à partir des coefficients d'analyse

$$a_\lambda = \langle x, \varphi_\lambda \rangle ,$$

répondre aux deux questions

- ▶ Estimer les paramètres du modèle (distributions des coefficients de synthèse et des cartes de signficance)
- ▶ Identifier les cartes de signficance.

De là, des estimations des coefficients de synthèse peuvent être obtenues.

**Algorithme itératif** : pour chaque itération, utiliser la distribution d'un groupe de coefficients  $\underline{\alpha}_g$  conditionnée par les valeurs des autres groupes à l'itération précédente pour en déduire une mise à jour de la carte.

Introduction

Motivation : sons et signaux musicaux

Dictionnaires pour les sons

Régression parcimonieuse et structurée

Formulations variationnelles

Modélisation probabiliste  
Coefficients d'analyse

Illustrations numériques

Conclusions, perspectives



# Union de bases

Supposons que le dictionnaire soit l'union de  $K$  bases orthonormales

$$\mathcal{D} = \Psi^1 \cup \Psi^2 \cup \dots \cup \Psi^K$$

- **Modèle de carte de signficance** :  $X_\ell^k \in \{s_0, s_k\}$ , et

$$\mathbb{P} \left\{ X_\ell^k = s_{k'} \right\} = p_k \delta_{kk'} + (1 - p_k) \delta_{k'0}$$

- **Modèle de signal** : un signal est décomposé comme

$$x = \sum_{k=1}^K \sum_{\ell} \alpha_\ell^k \psi_\ell^k + r,$$

où  $\underline{\alpha}^k$  est un vecteur Gaussien centré, dont la matrice de variance-covariance dépend de  $\mathbf{X}_k = \{X_\ell^k\}$ .

- **Bruit** : Bruit blanc Gaussien centré, de variance fixée  $\vartheta^2$ .

Introduction

Motivation : sons et signaux musicaux  
Dictionnaires pour les sons

Régression parcimonieuse et structurée

Formulations variationnelles  
Modélisation probabiliste  
Coefficients d'analyse

Illustrations numériques

Conclusions, perspectives



# Union de bases : principe algorithmique

- ▶ Basé sur les coefficients d'analyse  $\langle x, \psi_\ell^k \rangle$
- ▶ Comparaison avec les coefficients d'analyse "environnants"  $\langle x, \psi_{\ell'}^{k'} \rangle$ , et prise en compte de la valeur de l'état caché  $X_{\ell'}^{k'} \in \{s_0, s_{k'}\}$ .
- ▶ Décision :  $X_\ell^k = s_0$  ou  $s_k$ .
- ▶ Estimation des paramètres

Introduction

Motivation : sons et signaux musicaux  
Dictionnaires pour les sons

Régression parcimonieuse et structurée

Formulations variationnelles

Modélisation probabiliste  
Coefficients d'analyse

Illustrations numériques

Conclusions, perspectives





## Modèle de Bernoulli : $\alpha_\ell^k \sim \mathcal{N}(0, \sigma_k^2)$

Conditionnellement aux états cachés  $\mathbf{X}_{-k} = \{X_{\ell'}^{k'}, k' \neq k\}$ , les coefficients d'analyse

$$a_\ell^k = \langle \mathbf{x}, \psi_\ell^k \rangle = \alpha_\ell^k + \sum_{k' \neq k} \sum_{\ell'} \alpha_{\ell'}^{k'} \langle \psi_{\ell'}^{k'}, \psi_\ell^k \rangle$$

sont distribués suivant un mélange de Gaussiennes centrées et variances

$$\mathbb{E}_0 \left\{ |a_\ell^k|^2 \right\} = \begin{cases} (w_{0;\ell}^k)^2 = \gamma_\ell^k(\mathbf{X}_{-k}) + \vartheta^2 & \text{if } X_\ell^k = s_0 \\ (w_{1;\ell}^k)^2 = \sigma_k^2 + \gamma_\ell^k(\mathbf{X}_{-k}) + \vartheta^2 & \text{if } X_\ell^k = s_k \end{cases},$$

où les poids  $\gamma_\ell^k(\mathbf{X}_{-k})$  (aléatoires via  $\mathbf{X}$ ) sont définis par

$$\gamma_\ell^k(\mathbf{X}_{-k}) = \sum_{k' \neq k} \sum_{\ell'} I_{X_{\ell'}^{k'} = s_{k'}} \sigma_{k'}^2 |\langle \psi_\ell^k, \psi_{\ell'}^{k'} \rangle|^2.$$

**Question :** comment décider à partir de  $a_\ell^k$  si  $X_\ell^k = s_0$  ou  $X_\ell^k = s_k$  ?

Introduction

Motivation : sons et signaux musicaux

Dictionnaires pour les sons

Régression parcimonieuse et structurée

Formulations variationnelles

Modélisation probabiliste

Coefficients d'analyse

Illustrations numériques

Conclusions, perspectives



## Modèle de Bernoulli (2)

Pour simplifier, on introduit la fonction de seuillage

$$\tau_0 : (w_0, w_1, p) \mapsto \sqrt{\ln \left[ \frac{1-p}{p} \frac{w_1}{w_0} \right]} .$$

### Théorème (M. Kowalski & B.T. 2008)

*On suppose les états cachés  $X_\ell^k$  i.i.d. On suppose aussi que pour tout  $k, \ell$ , les paramètres  $w_{0;\ell}^k, w_{1;\ell}^k, p_k$  sont tels que  $\tau_0(w_{0;\ell}^k, w_{1;\ell}^k, p_k)$  est bien définie. Soient*

$$\tau^k(\ell) = \sqrt{\frac{2}{(w_{0;\ell}^k)^{-2} - (w_{1;\ell}^k)^{-2}}} \tau_0(w_{0;\ell}^k, w_{1;\ell}^k, p_k) .$$

*Alors l'estimateur MAP pour  $X_\ell^k$ , conditionnellement à  $\mathbf{X}_{-\ell}$  est donné par le seuillage adaptatif*

$$\hat{X}_\ell^k = \begin{cases} s_k & \text{si } |a_\ell^k| \geq \tau^k(\ell) \\ s_0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Introduction

Motivation :  
sons et signaux  
musicaux

Dictionnaires  
pour les sons

Régression  
parcimo-  
nieuse et  
structurée

Formulations  
variationnelles  
Modélisation  
probabiliste  
Coefficients  
d'analyse

Illustrations  
numériques

Conclusions,  
perspectives



# Algorithme pour le modèle Bernoulli

De même, des estimateurs pour les paramètres peuvent être obtenus. Ceci conduit naturellement à des algorithmes du type

---

## Algorithme (CEM-Bern)

- ▶ Initialiser les paramètres  $\sigma_k$  et  $p_k$  et les états cachés.
  - ▶ Itérer les étapes
    1. Calcul des poids  $\gamma_\ell^k(\mathbf{X}_{-k})$
    2. Ré-estimation des états cachés
    3. Ré-estimation des paramètres  $\sigma_k$  et  $p_k$ .
  - ▶ Estimation des coefficients significatifs  $\alpha_\ell^k$  tels que  $X_\ell^k = s_k$  par régression.
- 

**Initialisation** : approximations *champ moyen* (remplaçant les poids  $\gamma$  par leur espérance).

Introduction

Motivation : sons et signaux musicaux  
Dictionnaires pour les sons

Régression parcimonieuse et structurée

Formulations variationnelles  
Modélisation probabiliste  
Coefficients d'analyse

Illustrations numériques

Conclusions, perspectives



# Le cas stratifié

## Hypothèses :

- ▶ Les états cachés sont structurés de sorte à être constants à l'intérieur d'un groupe  $g$  :  $X_{gm}^k = X_g^k$ ,  $\forall m$ .
- ▶ Les coefficients de synthèse d'un même groupe forment un vecteur aléatoire Gaussien centré.

Alors le modèle génératif s'écrit

$$x = \sum_{k=1}^K \sum_g \sum_m \alpha_{g,m}^k \psi_{g,m}^k + r,$$

où pour tout  $k$ , les coefficients de synthèse  $\alpha_{g,m}^k$  forment, conditionnellement à  $X_g^k$ , un vecteur Gaussien de variance-covariance  $\Sigma^k$ .

$$\underline{\alpha}_g^k = \{\alpha_{g,m}^k, m = 1, 2, \dots\} \sim \begin{cases} \mathcal{N}(0, \Sigma^k) & \text{si } X_g^k = s_k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Introduction

Motivation : sons et signaux musicaux

Dictionnaires pour les sons

Régression parcimonieuse et structurée

Formulations variationnelles

Modélisation probabiliste

Coefficients d'analyse

Illustrations numériques

Conclusions, perspectives



## Le cas stratifié : coefficients d'analyse

Supposons  $\mathbf{X}_{-k} = \{x_{gm}^{k'}, k' \neq k\}$  fixé. Conditionnellement à  $\mathbf{X}_{-k}$ , les coefficients d'analyse  $a_{g,m}^k = \langle x, \psi_{g,m}^k \rangle$  sont distribués suivant une loi Gaussienne multivariée centrée. Pour  $g$  fixé, on a

$$\mathbb{E}_0 \left\{ a_{gm}^k \bar{a}_{gm'}^k \right\} = I_g^k \Sigma_{mm'}^k + \left[ \Gamma_g^k(\mathbf{X}_{-k}) \right]_{mm'} + \vartheta^2 \delta_{mm'},$$

où on a introduit les indicatrices

$$I_g^k = \begin{cases} 1 & \text{if } X_g^k = s_k \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

et les matrices (aléatoires) de variance-covariance  $\Gamma_g^k(\mathbf{X}_{-k})$  définies par

$$\left[ \Gamma_g^k(\mathbf{X}_{-k}) \right]_{mm'} = \sum_{k' \neq k} \sum_{g'} I_{g'}^{k'} \sum_{n, n'} \Sigma_{nn'}^{k'} \langle \psi_{g'n}^{k'}, \psi_{gm}^k \rangle \langle \psi_{gm'}^k, \psi_{g'n'}^{k'} \rangle.$$

$\Gamma_g^k(\mathbf{X}_{-k})$  est semi-définie positive par construction.

Introduction

Motivation : sons et signaux musicaux  
Dictionnaires pour les sons

Régression parcimonieuse et structurée

Formulations variationnelles  
Modélisation probabiliste  
Coefficients d'analyse

Illustrations numériques

Conclusions, perspectives



## Le cas stratifié : estimation de la carte

posons  $W_{0;g}^k = \Gamma_g^k(\mathbf{X}_{-k}) + \vartheta^2 I$ ,  $W_{1;g}^k = W_{0;g}^k + \Sigma_g^k$ .

### Théorème (M. Kowalski & B.T. 2009)

Soit  $k$  une couche du modèle, et supposons  $\mathbf{X}_{-k}$  fixé. On suppose que les matrices  $W_{0;g}^k$  et  $W_{1;g}^k$  sont inversibles, et on pose

$$C_g^k = \left(W_{0;g}^k\right)^{-1} - \left(W_{1;g}^k\right)^{-1}.$$

$$\tilde{\tau}^k(g) = \tau_0(\det(W_{0;g}^k), \det(W_{1;g}^k), p_k)$$

(supposant que  $\tilde{\tau}^k(g)$  soit bien défini).

Conditionnellement à  $\mathbf{X}_{-k}$ , l'estimateur MAP pour les états cachés  $X_g^k$  est donné par

$$\hat{X}_g^k = \begin{cases} s_k & \text{if } |\langle \underline{a}_g^k, C_g^k \underline{a}_g^k \rangle| \geq \tilde{\tau}^k(g) \\ s_0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Introduction

Motivation : sons et signaux musicaux

Dictionnaires pour les sons

Régression parcimonieuse et structurée

Formulations variationnelles

Modélisation probabiliste

Coefficients d'analyse

Illustrations numériques

Conclusions, perspectives



# Cas stratifié : algorithme

De nouveau, les paramètres du modèle (sauf  $\vartheta$ ) peuvent être estimés, conditionnellement aux états cachés.

---

## Algorithme (CEM-Strat)

- ▶ Initialiation des paramètres  $\Sigma^k$  et  $p_k$ , et des états cachés  $\mathbf{X}$ .
  - ▶ Iteration :
    1. Calcul des matrices  $\Gamma_g^k(\mathbf{X}_{-k})$
    2. Ré-estimation des états cachés  $X_{g;m}^k$
    3. Ré-estimation des paramètres  $\Sigma^k$  et  $p_k$ .
  - ▶ Estimation des coefficients significatifs  $\underline{\alpha}_g^k$  tels que  $X_g^k = s_k$  par régression.
- 

Introduction

Motivation : sons et signaux musicaux

Dictionnaires pour les sons

Régression parcimonieuse et structurée

Formulations variationnelles

Modélisation probabiliste  
Coefficients d'analyse

Illustrations numériques

Conclusions, perspectives



# Plan de l'exposé

## Introduction

Motivation : sons et signaux musicaux  
Dictionnaires pour les sons

## Régression parcimonieuse et structurée

Formulations variationnelles  
Modélisation probabiliste  
Coefficients d'analyse

## Illustrations numériques

## Conclusions, perspectives

### Introduction

Motivation : sons et signaux musicaux  
Dictionnaires pour les sons

### Régression parcimonieuse et structurée

Formulations variationnelles  
Modélisation probabiliste  
Coefficients d'analyse

### Illustrations numériques

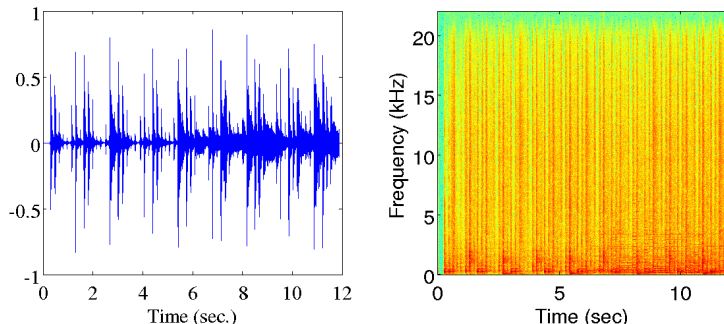
Conclusions, perspectives





# Illustrations numériques

Décomposition de 10 secondes de la chanson *Mamavatu* de Susheela Raman sur l'union de deux bases MDCT.



**FIG.:** Mamavatu (gauche) et sa décomposition sur une base MDCT unique (droite).

Introduction

Motivation :  
sons et signaux  
musicaux  
Dictionnaires  
pour les sons

Régression  
parcimonieuse et  
structurée

Formulations  
variationnelles  
Modélisation  
probabiliste  
Coefficients  
d'analyse

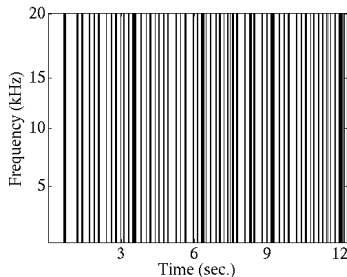
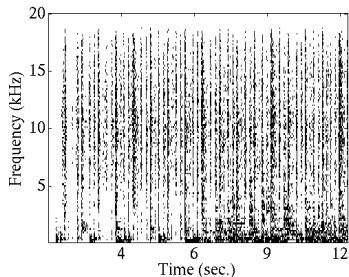
Illustrations  
numériques

Conclusions,  
perspectives



## Illustrations numériques (2)

Estimation des cartes de signficance pour la couche transitoire dans un modèle à deux couches.



**FIG.:** Décomposition de mamavatu en deux couches. Gauche : carte de signficance de la couche transitoire estimée avec le modèle Bernoulli. Droite : carte de signficance de la couche transitoire estimée avec le modèle stratifié.

Introduction

Motivation : sons et signaux musicaux

Dictionnaires pour les sons

Régression parcimonieuse et structurée

Formulations variationnelles

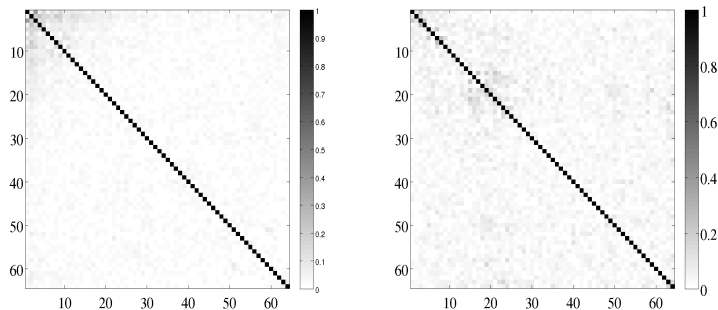
Modélisation probabiliste  
Coefficients d'analyse

Illustrations numériques

Conclusions, perspectives



## Illustrations numériques (3)



**FIG.:** Matrices de corrélation des vecteurs de coefficients d'analyse : non-transitoire (gauche) et transitoire (droite).

Introduction

Motivation : sons et signaux musicaux

Dictionnaires pour les sons

Régression parcimonieuse et structurée

Formulations variationnelles

Modélisation probabiliste

Coefficients d'analyse

Illustrations numériques

Conclusions, perspectives



# Conclusions, perspectives

- ▶ Deux approches complémentaires pour les problèmes de régression parcimonieuse et structurée.
- ▶ Similarités entre les deux approches : seuillages sur coefficients d'analyse ou sur une forme quadratique de ceux ci.
- ▶ Approche variationnelle : très simple à mettre en oeuvre, algorithmes itératifs à la convergence pas toujours très rapide (Landweber). Nécessité de réglage de paramètres de régularisation.

Introduction

Motivation : sons et signaux musicaux

Dictionnaires pour les sons

Régression parcimonieuse et structurée

Formulations variationnelles

Modélisation probabiliste  
Coefficients d'analyse

Illustrations numériques

Conclusions, perspectives



## Conclusions, perspectives (2)

- ▶ Approche “modèle” : assez simple à mettre en oeuvre ; plus facile d'utilisation (réglage automatique de paramètres de régularisation). Difficulté : calcul des poids  $\gamma$  ou des matrices  $\Gamma$  à chaque itération.
- ▶ Analyse des performances plus difficile dans le cas stratifié
- ▶ Applications en cours :
  - audio : codage, classification de sons d'instruments,...
  - signaux EEG/MEG : détection de caractéristiques, multi-capteur, multi-essai (BCI en vue...)
  - Plus généralement : tous les signaux présentant des propriétés de persistance (si nécessaire approchée)

Introduction

Motivation : sons et signaux musicaux  
Dictionnaires pour les sons

Régression parcimonieuse et structurée






Formulations variationnelles  
Modélisation probabiliste  
Coefficients d'analyse

Illustrations numériques

Conclusions, perspectives



# Merci pour votre attention

-  Daudet, L. and Torrèsani, B., "Hybrid representations for audiophonic signal encoding," *Signal Processing* **82**(11), 1595–1617 (2002). Special issue on Image and Video Coding Beyond Standards.
-  Kowalski, M., "Sparse regression using mixed norms," *Applied and Computational Harmonic Analysis* (2009)... latest issue
-  Kowalski, M. and Torrèsani, B., "Random models for sparse signals expansion on unions of bases with application to audio signals," *IEEE Transactions on Signal Processing* **58**(8), 3468–3481 (2008).
-  Kowalski, M. and Torrèsani, B., "Sparsity and persistence : mixed norms provide simple signal models with dependent coefficients," *Signal, Image and Video Processing* (2009).
-  Kowalski, M. and Torrèsani, B., "Sparsity and persistence in time-frequency sound representations", in *Wavelet XIII*, SPIE Annual Symposium, San Diego, August 2009.

[http ://www.latp.univ-mrs.fr/~torresan](http://www.latp.univ-mrs.fr/~torresan)

Introduction

Motivation :  
sons et signaux  
musicaux  
Dictionnaires  
pour les sons

Régression  
parcimo-  
nieuse et  
structurée

Formulations  
variationnelles  
Modélisation  
probabiliste  
Coefficients  
d'analyse

Illustrations  
numériques

Conclusions,  
perspectives

