

Journée sur les méthodes particulières en estimation et commande optimale stochastique (matin)

9h30 - 10h00 : “Introduction aux méthodes particulières”,
Nadia Oudjane (EDF/R&D, Clamart)

10h00 - 11h00 : “Méthodes de Monte Carlo avec interaction pour l’inférence
statistique des modèles de Markov cachés”,
François Le Gland (INRIA, Rennes)

11h00 - 11h30 : **pause café**

11h30 - 12h30 : “Algorithmes de filtres particulières hybrides”,
Christian Musso (ONERA, Châtillon)

Journée sur les méthodes particulières en estimation et commande optimale stochastique (après-midi)

14h00 - 15h00 : “Les méthodes particulières en estimation non linéaire”,
Pierre Del Moral (Université Paul Sabatier, Toulouse)

15h00 - 15h30 : **pause café**

15h30 - 16h30: “Commande optimale stochastique : des arbres de scénarios
aux méthodes particulières”, **Guy Cohen (CERMICS / INRIA)**
et **Anes Dallagi (CERMICS)**

16h30 - 17h00 : **Discussions**

Introduction aux méthodes particulières

1. Description du filtre optimal

2. Quelques applications

3. Méthode particulières pour le filtrage

Le problème du filtrage

► **Processus état (signal)** $(X_n)_{n \geq 0} \in E = \mathbb{R}^d$

X_n **Chaîne de Markov** $\sim (\pi_0, Q_n)$ **Ex :** $X_n = F_n(X_{n-1}, \varepsilon_n)$

► **Processus observation** $(Y_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^q$

$Y_n = h(X_n) + \eta_n$ $\eta_n \sim g_n$

► **Calcul du filtre optimal** $(\pi_n)_{n \geq 0} \in \mathcal{P}(E)$

$\pi_n(dx) = \mathbb{P}[X_n \in dx \mid Y_{1:n}]$ **avec** $Y_{1:n} = (Y_1, \dots, Y_n)$

Filtre de prédiction et vraisemblance

- **Filtre de prédiction** $(\pi_{n|n-1})_{n \geq 0} \in \mathcal{P}(E)$

$$\pi_{0|-1} = \pi_0 \quad \pi_{n|n-1}(dx) = \mathbb{P}[X_n \in dx \mid Y_{1:n-1}]$$

- **Fonction de vraisemblance** $\Psi_n : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$

$$\Psi_n(x) = p_{Y_n|X_n=x}(Y_n)$$

$$Y_n = h(X_n) + \eta_n \quad \text{avec} \quad \eta_n \sim g_n \quad \Rightarrow \quad \Psi_n(x) = g_n(Y_n - h(x))$$

Evolution du filtre optimal $\pi_{n-1} \longrightarrow \pi_n$

$$\pi_{n-1} \xrightarrow[\text{Prédiction}]{(1)} \pi_{n|n-1} = Q_n \pi_{n-1} \xrightarrow[\text{Correction}]{(2)} \pi_n = \Psi_n \cdot \pi_{n|n-1}$$

► **Prédiction** $\pi_{n-1} \longrightarrow \pi_{n|n-1}$

$$\pi_{n|n-1}(dx') = \int_E \pi_{n-1}(dx) Q_n(x, dx')$$

$$\pi_{n|n-1} = Q_n \pi_{n-1}$$

► **Correction** $\pi_{n|n-1} \longrightarrow \pi_n$

$$\pi_n(dx) = \frac{\Psi_n(x) \pi_{n|n-1}(dx)}{\int_E \pi_{n|n-1}(du) \Psi_n(u)}$$

$$\pi_n = (\Psi_n \cdot \pi_{n|n-1})$$

Filtres approchés

► Méthodes analytiques

- **Kalman** optimal dans les cas linéaires gaussiens
- **Kalman Étendu** cas pas trop non-linéaires et monomodaux

► Méthodes numériques

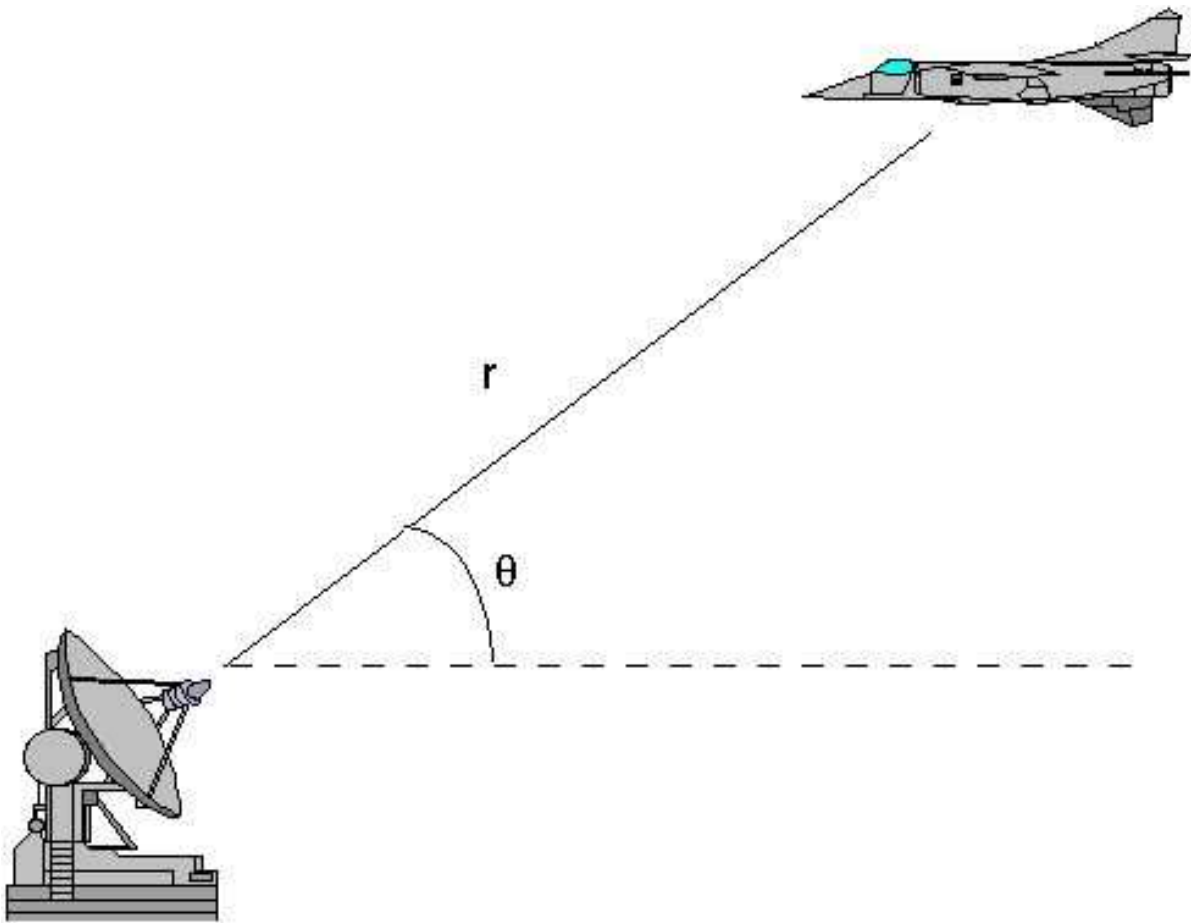
- **Maillage fixe** ou **adaptatif** Kushner, Dupuis (92) / Cai, Le Gland, Zhang (95)
Faible dimension ($d \leq 3$)

► Méthodes de Monte-Carlo

- Filtre **Particulaire** Del Moral, Rigal et Salut (92)
- Filtre **Bootstrap** ou **SIR** Gordon, Salmond et Smith (93)
- Filtre de **Monte Carlo** Kitagawa (96)

Quasi-insensibilité à la dimension et aux non linéarités

Le problème du pistage



Description du modèle de pistage

► Modèle d'état et d'observation (X, Y)

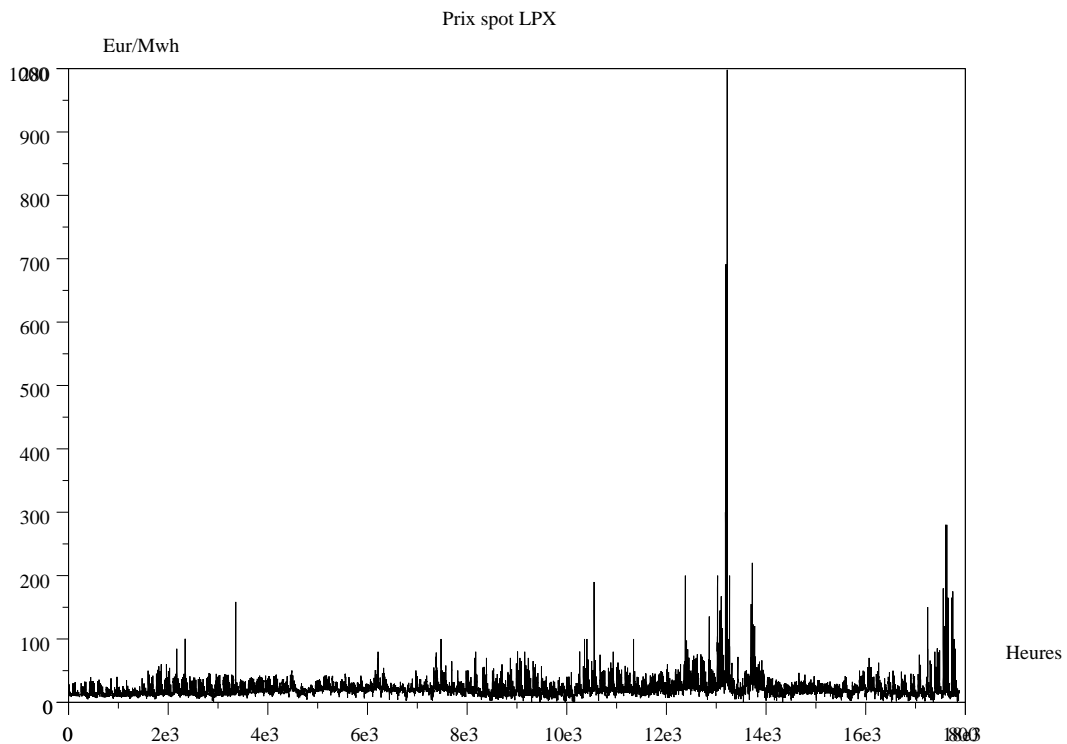
$$X_{n+1} = \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ \dot{x}_{n+1} \\ y_{n+1} \\ \dot{y}_{n+1} \end{bmatrix} = F \begin{bmatrix} x_n \\ \dot{x}_n \\ y_n \\ \dot{y}_n \end{bmatrix} + G \begin{bmatrix} \varepsilon_n^1 \\ \varepsilon_n^2 \end{bmatrix} \quad \text{linéaire}$$

$$Y_n = \begin{pmatrix} \sqrt{x_n^2 + y_n^2} \\ \arctan(y_n/x_n) \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_n^1 \\ \eta_n^2 \end{bmatrix} \quad \text{non linéaire}$$

► But : Estimer X_n sachant les observations (Y_1, \dots, Y_n)

Application pour le calage du modèle à 2 facteurs

► **Données de prix spot électriques** $(S_t)_{t \geq 0} \in \mathbb{R}^+$



Application pour le calage du modèle à 2 facteurs

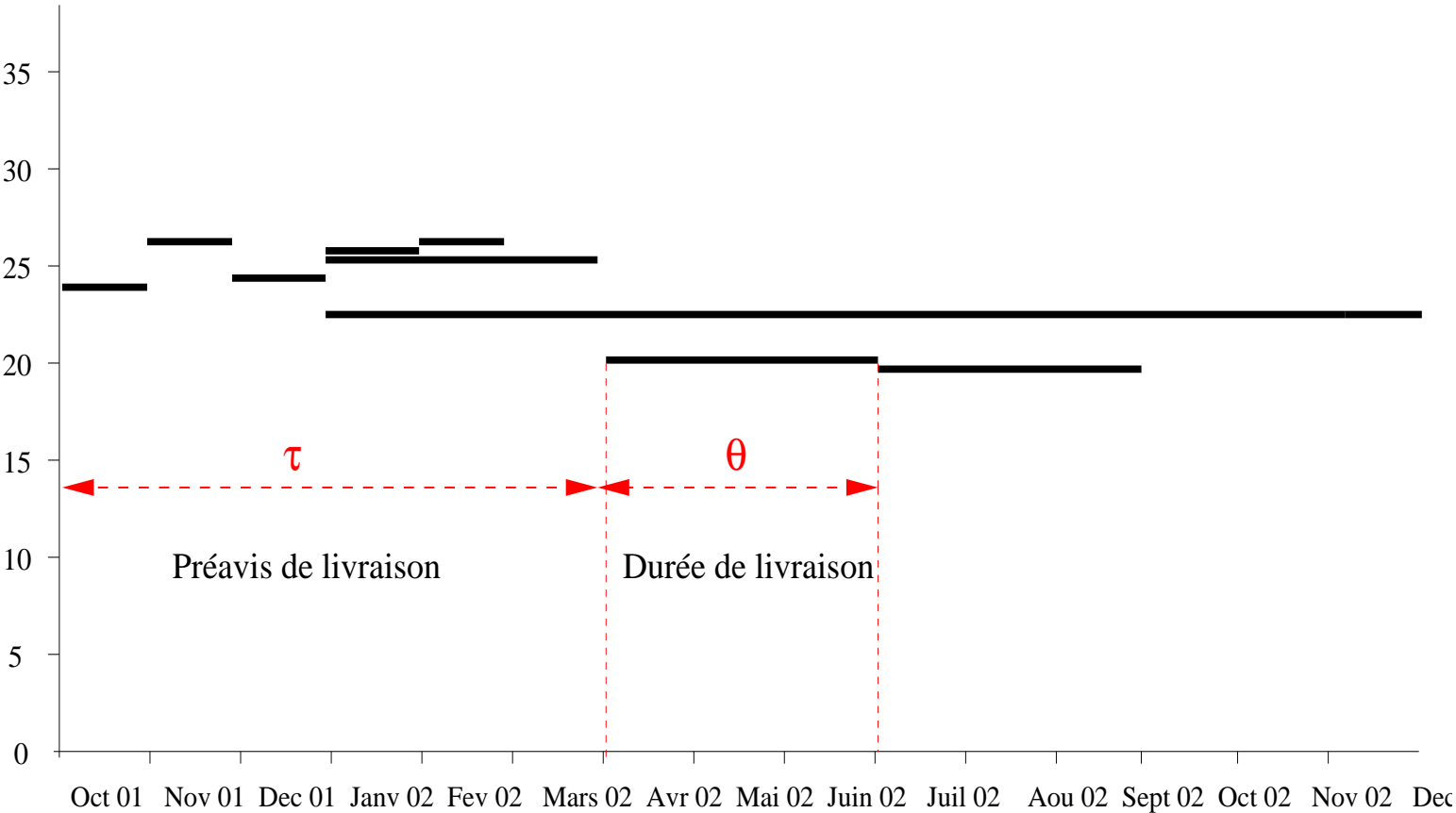
- Données de prix à terme $F(t, T, \theta)$ t fixé

Platts German Assessments (Eur/MWh) 28--Sep-01				
	Eur/MWh		DM Equivalents	
	<i>Baseload</i>	<i>Peak</i>	<i>Baseload</i>	<i>Peak</i>
Saturday	20.50 - 20.80	n/a - n/a	40.10 - 40.68	n/a - n/a
Sunday	14.70 - 14.90	n/a - n/a	28.75 - 29.14	n/a - n/a
Monday	25.85 - 26.10	32.75 - 33.00	50.56 - 51.05	64.06 - 64.55
Week-ahead	22.60 - 22.80	30.20 - 30.50	44.21 - 44.60	59.07 - 59.66
Weekend	17.50 - 17.70	n/a - n/a	34.23 - 34.62	n/a - n/a
October	23.95 - 24.10	33.95 - 34.10	46.85 - 47.14	66.41 - 66.70
November	26.30 - 26.40	37.20 - 37.30	51.44 - 51.64	72.76 - 72.96
December	24.25 - 24.35	34.30 - 34.50	47.43 - 47.63	67.09 - 67.48
January	26.25 - 26.50	36.80 - 37.00	51.35 - 51.83	71.98 - 72.37
February	26.35 - 26.50	36.75 - 37.10	51.54 - 51.83	71.88 - 72.57
March	23.30 - 23.50	33.25 - 33.50	45.57 - 45.97	65.04 - 65.53
Q4 2001	24.75 - 24.80	35.15 - 35.25	48.41 - 48.51	68.75 - 68.95
Q1 2002	25.25 - 25.45	35.50 - 35.90	49.39 - 49.78	69.44 - 70.22
Q2 2002	20.00 - 20.20	29.40 - 29.80	39.12 - 39.51	57.51 - 58.29
Q3 2002	19.95 - 20.15	29.40 - 29.80	39.02 - 39.41	57.51 - 58.29
Year 2002	22.50 - 22.60	32.40 - 32.60	44.01 - 44.21	63.37 - 63.77
Year 2003	23.15 - 23.30	33.00 - 33.25	45.28 - 45.57	64.55 - 65.04
Year 2004	23.85 - 24.30	33.75 - 34.50	46.65 - 47.53	66.02 - 67.48

Peak=0800-2000

Application pour le calage du modèle à 2 facteurs

► Représentation des données de prix à terme $F(t, T, \theta)$ t fixé



Description du modèle à 2 facteurs

► **Modèle à 2 facteurs** $(F(t, T, \theta))_{t \geq 0} \in \mathbb{R}^+$

$$\left\{ \begin{array}{l} S_t = F(t, t, 1) \\ F(t, T, \theta) = \frac{1}{\theta} \sum_{i=0}^{\theta-1} F(0, T) \exp(e^{-\alpha(T+i-t)} X_t^c + X_t^l + A(T+i-t)) \\ dX_t^c = -\alpha X_t^c dt + \sigma_c dZ_t^c \\ dX_t^l = \sigma_l dZ_t^l \end{array} \right.$$

► **But : Estimer** $\rho = (\alpha, \sigma_c, \sigma_l)$ sachant les observations (Y_1, \dots, Y_n) où

$$Y_k = F(t_k, T, \theta) + \eta_k$$

Maximum de vraisemblance et filtrage

- **Méthode : maximum de vraisemblance** $\Psi^\rho(Y_1, \dots, Y_n)$

$$\Psi^\rho(Y_1, \dots, Y_n) = p_{Y_1, \dots, Y_n}(Y_1, \dots, Y_n)$$

$$\hat{\rho} = \mathbf{Argmax} \{ \Psi^\rho(Y_1, \dots, Y_n), \rho \in A \}$$

- **Calcul de la vraisemblance** $\Psi^\rho(Y_1, \dots, Y_n)$ **par filtrage**

$$\Psi(Y_1, \dots, Y_n) = \prod_{k=1}^n \int_{x \in E} p_{Y_k | X_k = x}(Y_k) \mathbb{P}(X_k \in dx | Y_{k-1}, \dots, Y_1)$$

$$\Psi^\rho(Y_1, \dots, Y_n) = \prod_{k=1}^n \int_{x \in E} \Psi_k^\rho(x) \pi_{k|k-1}^\rho(dx)$$

Evolution du filtre optimal $\pi_{n-1} \longrightarrow \pi_n$

$$\pi_{n-1} \xrightarrow[\text{Prédiction}]{(1)} \pi_{n|n-1} = Q_n \pi_{n-1} \xrightarrow[\text{Correction}]{(2)} \pi_n = \Psi_n \cdot \pi_{n|n-1}$$

► **Prédiction** $\pi_{n-1} \longrightarrow \pi_{n|n-1}$

$$\pi_{n|n-1}(dx') = \int_E \pi_{n-1}(dx) Q_n(x, dx')$$

$$\pi_{n|n-1} = Q_n \pi_{n-1}$$

► **Correction** $\pi_{n|n-1} \longrightarrow \pi_n$

$$\pi_n(dx) = \frac{\Psi_n(x) \pi_{n|n-1}(dx)}{\int_E \pi_{n|n-1}(du) \Psi_n(u)}$$

$$\pi_n = (\Psi_n \cdot \pi_{n|n-1})$$

Principe du filtre particulaire avec interaction (IPF)

$$\pi_{n-1}^N \xrightarrow[\text{Prédiction}]{(1)} \pi_{n|n-1}^N = S^N(Q_n \pi_{n-1}^N) \xrightarrow[\text{Correction}]{(2)} \pi_n^N = \Psi_n \cdot \pi_{n|n-1}^N$$

échantillonnée

► Prédiction échantillonnée

$$\pi_{n|n-1}^N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\xi_{n|n-1}^i} \quad \text{avec} \quad (\xi_{n|n-1}^1, \dots, \xi_{n|n-1}^N) \sim Q_n \pi_{n-1}^N$$

► Correction

$$\pi_n^N = \sum_{i=1}^N \omega_n^i \delta_{\xi_{n|n-1}^i} \quad \text{avec} \quad \omega_n^i = \frac{\Psi_n(\xi_{n|n-1}^i)}{\sum_{j=1}^N \Psi_n(\xi_{n|n-1}^j)}$$

Filtre particulière avec interaction (IPF)

$$\pi_{n-1}^N \xrightarrow{\text{(1) Prédiction}} \pi_{n|n-1}^N = S^N(Q_n \pi_{n-1}^N) \xrightarrow{\text{(2) Correction}} \pi_n^N = \Psi_n \cdot \pi_{n|n-1}^N$$

échantillonnée

$$\pi_{n-1}^N = \{ \omega_{n-1}^1 \delta_{\xi_{n-1|n-2}^1} + \dots + \omega_{n-1}^N \delta_{\xi_{n-1|n-2}^N} \}$$

(1.a) ↓ Echantillonnage ↓

$$\{ \xi_{n-1}^1, \dots, \xi_{n-1}^N \}$$

(1.b) ↓ Evolution Q_n ↓

$$\pi_{n|n-1}^N = \left\{ \frac{1}{N} \delta_{\xi_{n|n-1}^1} + \dots + \frac{1}{N} \delta_{\xi_{n|n-1}^N} \right\}$$

(2) ↓ Correction Y_n ↓

$$\omega_n^i \propto \Psi_n(\xi_{n|n-1}^i)$$

$$\pi_n^N = \{ \omega_n^1 \delta_{\xi_{n|n-1}^1} + \dots + \omega_n^N \delta_{\xi_{n|n-1}^N} \}$$

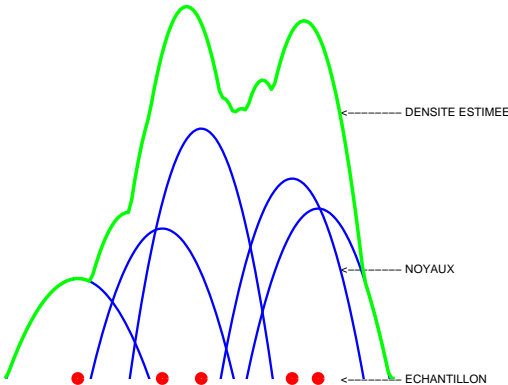
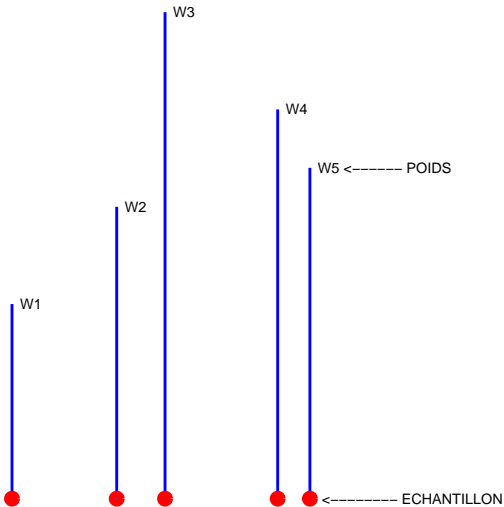
Régularisation

► Noyau de régularisation (d'ordre 2) K

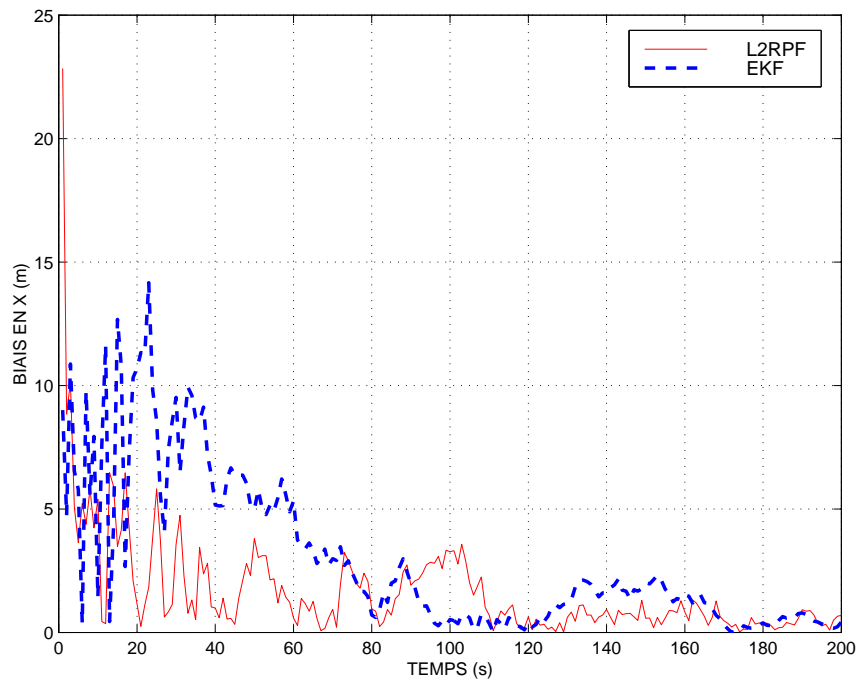
$$K \geq 0 \quad \int K = 1 \quad \int x_i K = 0 \quad \int |x_i x_j| K < \infty$$

► Noyau dilaté K_h $K_h(x) = \frac{1}{h^d} K\left(\frac{x}{h}\right)$

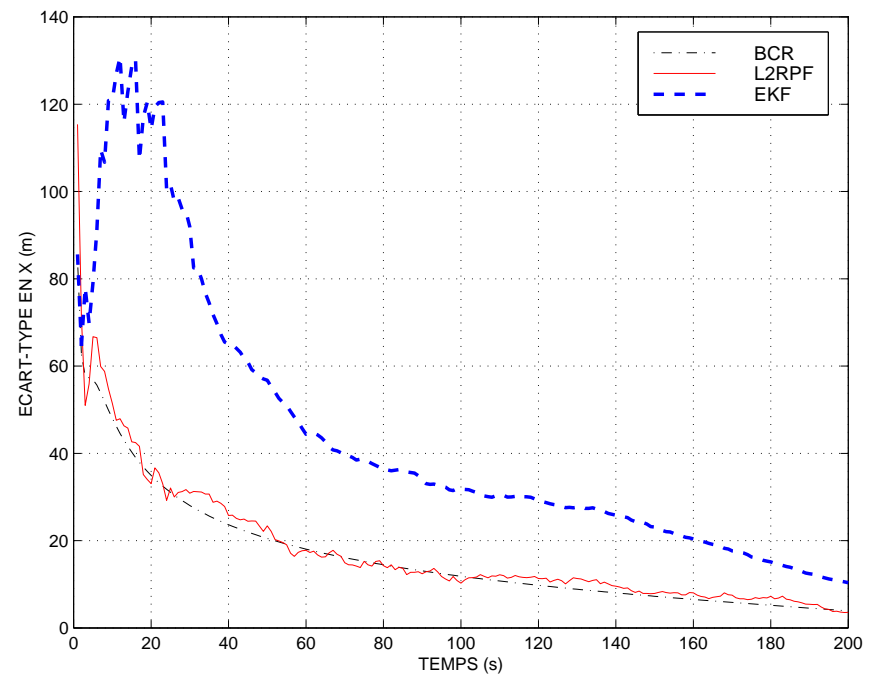
► $\mu^N = \sum \omega^i \delta_{\xi^i} \xrightarrow[\text{K}_h * \cdot]{\text{Régularisation}} \mu^{N,h} = \sum \omega^i K_h(\cdot - \xi^i)$



RPF / EKF : mesure de distance et d'angle

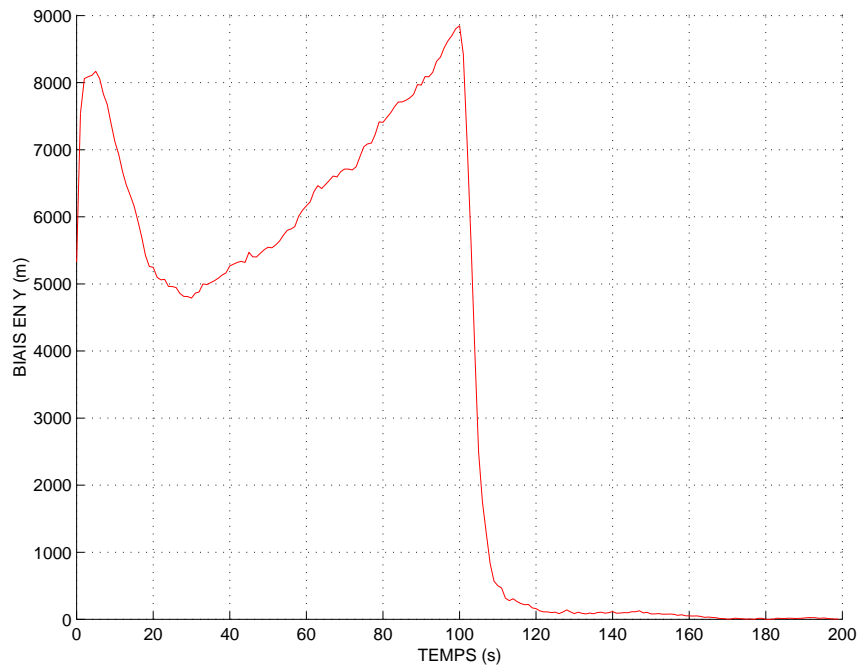


Biais en X

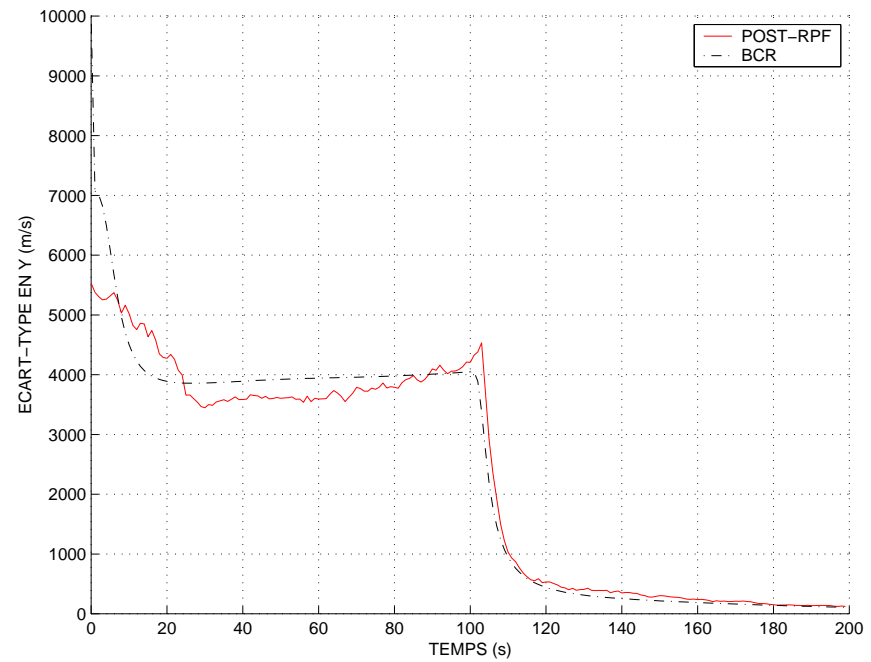


Ecart-type X

RPF / EKF : mesure d'angle seul

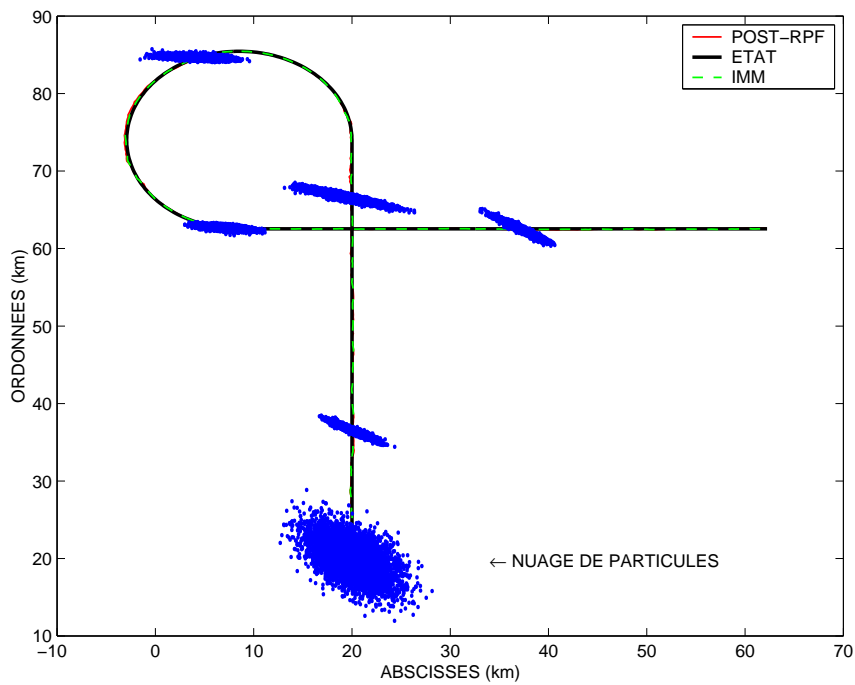


Biais en Y

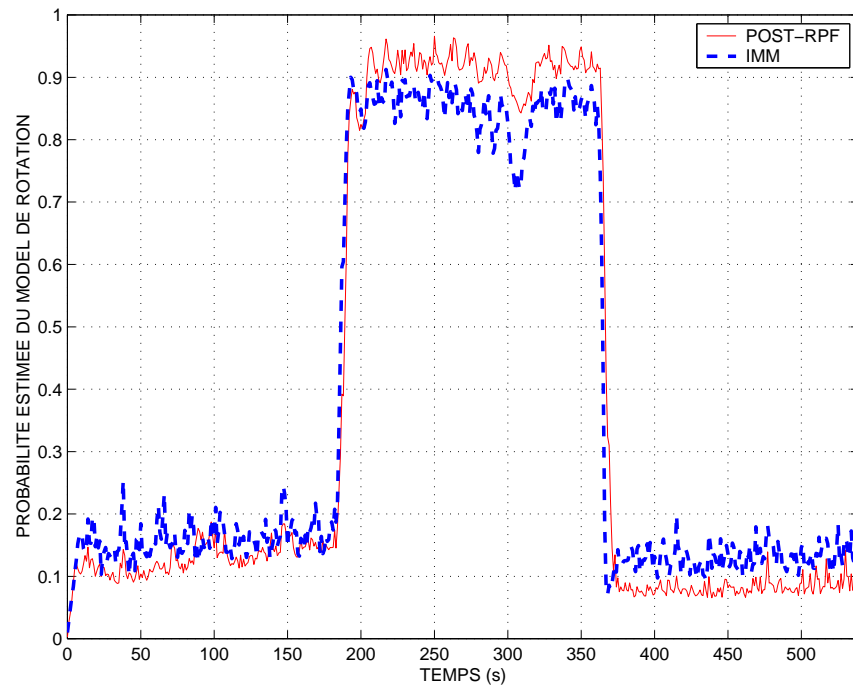


Ecart-type en Y

RPF / IMM : cible manœuvrante (1)

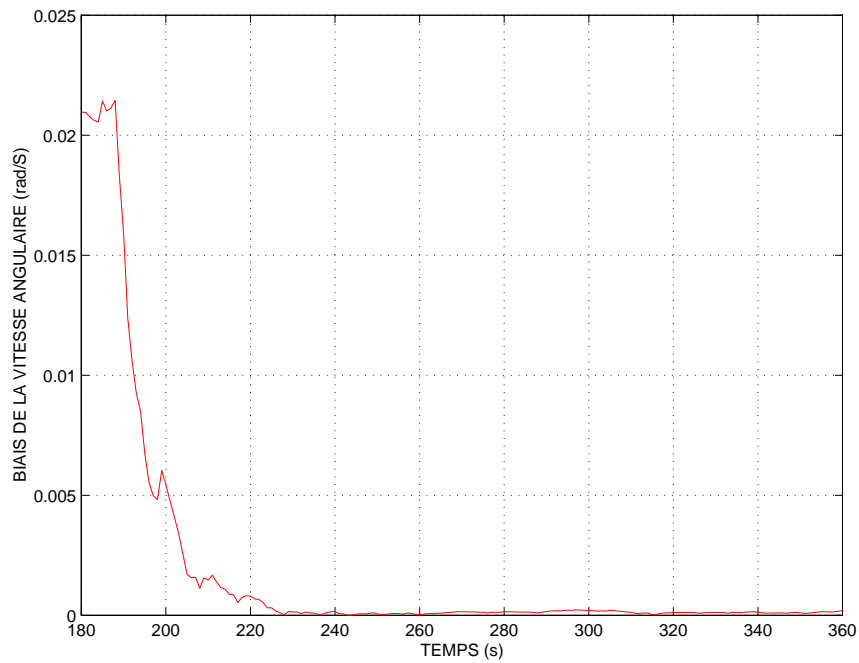


Trajectoires réelle et estimées

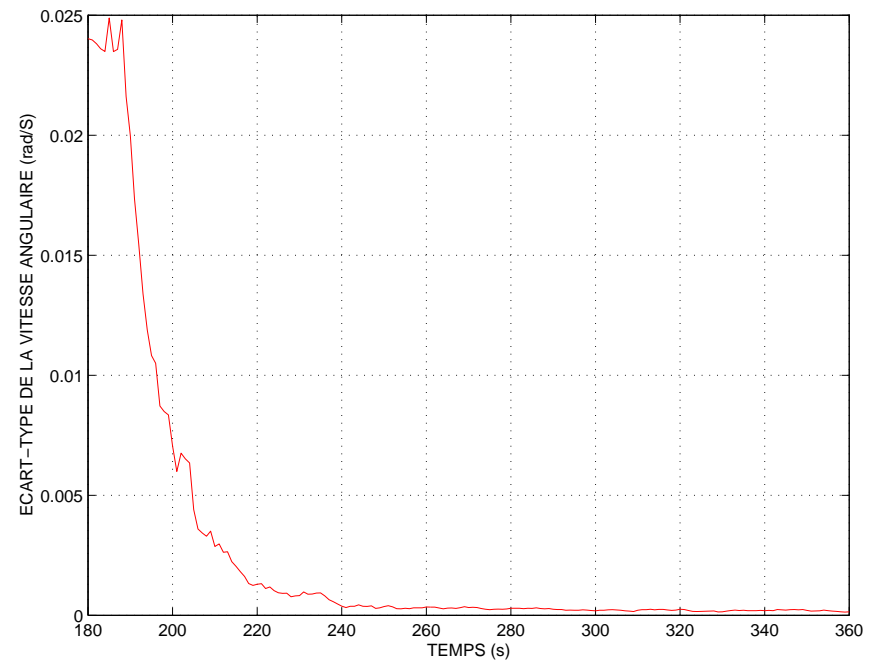


Probabilité du model de rotation

RPF / IMM : cible manœuvrante (2)



Biais de la vitesse angulaire



Ecart-type de la vitesse angulaire

“Richesse d’une transition”

► Prédiction

$$\beta_n = \beta(Q_n) \leq 1$$

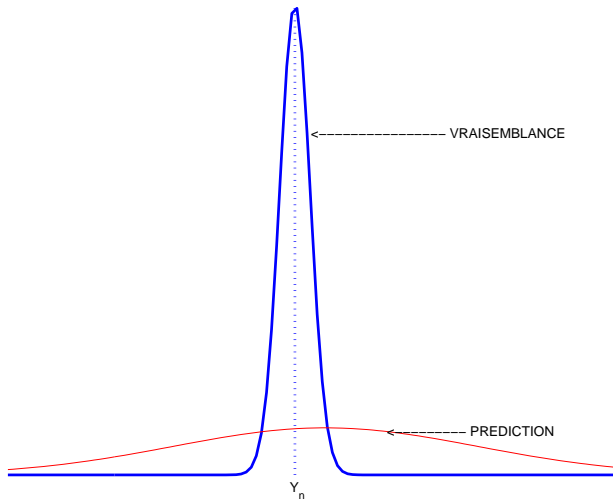
$$\|Q_n \mu - Q_n \mu'\| \leq \beta_n \|\mu - \mu'\|$$

Oubli du passé

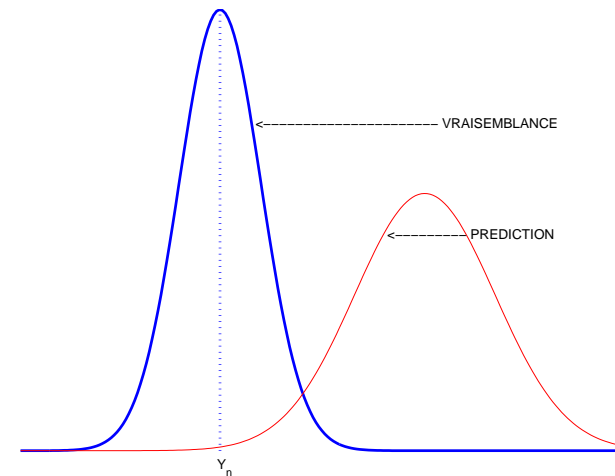
► Correction

$$\bar{\gamma}_n = \frac{\|\Psi_n\|}{\langle \pi_{n|n-1}, \Psi_n \rangle} \geq 1$$

Gain d’information



Observation **précise** / $\pi_{n|n-1}$



Observation **incohérente** / $\pi_{n|n-1}$

Faiblesses de l'IPF

► Faible bruit d'état ($\beta_n \approx 1$)

► Faible bruit d'observation ($\bar{\gamma}_n \ll 1$)

