Décidabilité de certaines classes de relations rationnelles

Olivier Carton,

Christian Choffrut, Serge Grigorieff

LIAFA, CNRS UMR 7089
Université Paris 7

IRISA, Juin 2006

1 Introduction

2 Automates
- Automates déterministes
- Automates synchrones
- Automates décentralisés

3 Hiérarchie

4 Le cas non commutatif

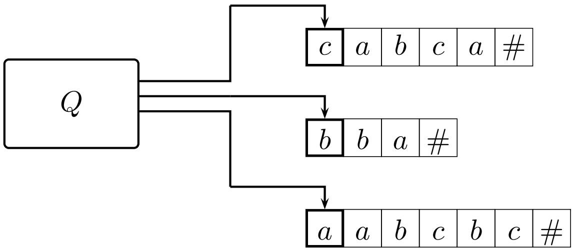
5 Le cas commutatif

Machine de Turing vs Automates

$$
\begin{tikzcd}
\text{Machines de Turing} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\begin{array}{c}\text{Lecture uniquement}\\ \text{de gauche à droite}\end{array}"] & \text{Machines à } n \text{ bandes} \arrow[d] \\
\text{Automates} \arrow[r] & \text{Automates à } n \text{ bandes}
\end{tikzcd}
$$

Automates à n bandes (vision machines de Turing)

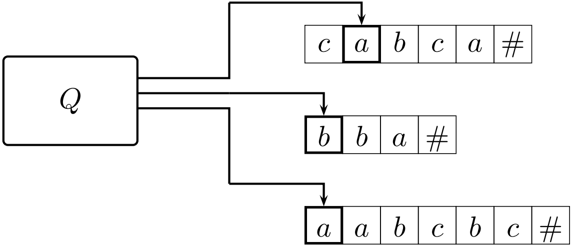
Calcul sur l'entrée $(cabca, bba, aabcbc) \in A_1^* \times A_2^* \times A_3^*$



- contrôle unique (non déterministe)
- toutes les têtes en lecture uniquement
- déplacement des têtes de lecture de gauche à droite
- arrêt uniquement sur les marqueurs de fin

Automates à n bandes (vision machines de Turing)

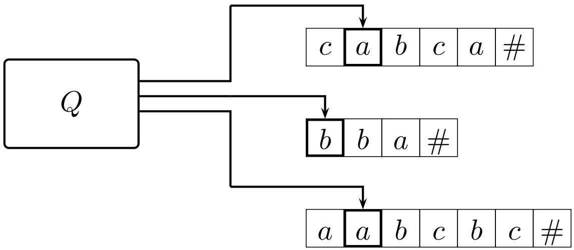
Calcul sur l'entrée $(cabca, bba, aabcbc) \in A_1^* \times A_2^* \times A_3^*$



- contrôle unique (non déterministe)
- toutes les têtes en lecture uniquement
- déplacement des têtes de lecture de gauche à droite
- arrêt uniquement sur les marqueurs de fin

Automates à n bandes (vision machines de Turing)

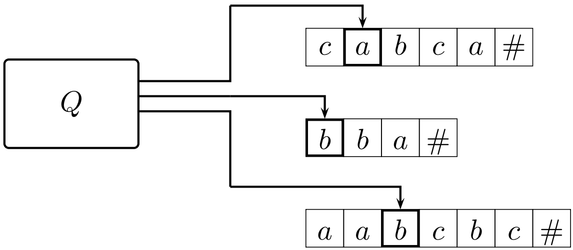
Calcul sur l'entrée $(cabca, bba, aabcbc) \in A_1^* \times A_2^* \times A_3^*$



- contrôle unique (non déterministe)
- toutes les têtes en lecture uniquement
- déplacement des têtes de lecture de gauche à droite
- arrêt uniquement sur les marqueurs de fin

Automates à n bandes (vision machines de Turing)

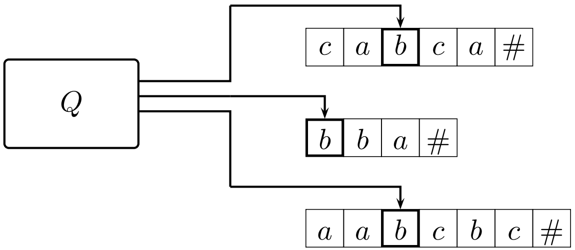
Calcul sur l'entrée $(cabca, bba, aabcbc) \in A_1^* \times A_2^* \times A_3^*$



- contrôle unique (non déterministe)
- toutes les têtes en lecture uniquement
- déplacement des têtes de lecture de gauche à droite
- arrêt uniquement sur les marqueurs de fin

Automates à n bandes (vision machines de Turing)

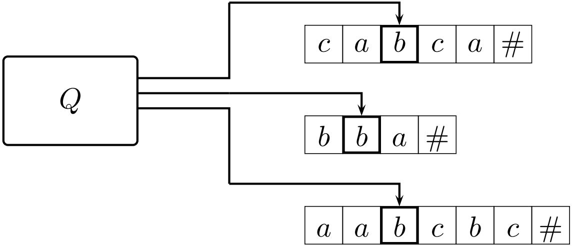
Calcul sur l'entrée $(cabca, bba, aabcbc) \in A_1^* \times A_2^* \times A_3^*$



- contrôle unique (non déterministe)
- toutes les têtes en lecture uniquement
- déplacement des têtes de lecture de gauche à droite
- arrêt uniquement sur les marqueurs de fin

Automates à n bandes (vision machines de Turing)

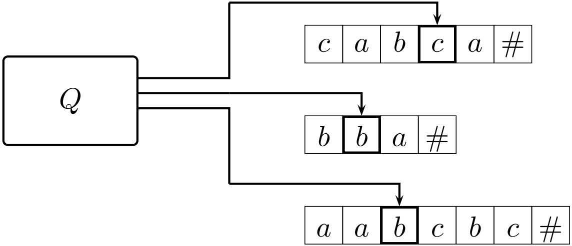
Calcul sur l'entrée $(cabca, bba, aabcbc) \in A_1^* \times A_2^* \times A_3^*$



- contrôle unique (non déterministe)
- toutes les têtes en lecture uniquement
- déplacement des têtes de lecture de gauche à droite
- arrêt uniquement sur les marqueurs de fin

Automates à n bandes (vision machines de Turing)

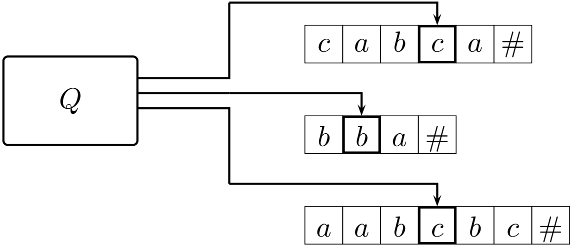
Calcul sur l'entrée $(cabca, bba, aabcbc) \in A_1^* \times A_2^* \times A_3^*$



- contrôle unique (non déterministe)
- toutes les têtes en lecture uniquement
- déplacement des têtes de lecture de gauche à droite
- arrêt uniquement sur les marqueurs de fin

Automates à n bandes (vision machines de Turing)

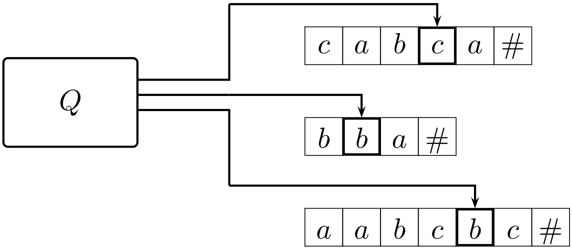
Calcul sur l'entrée $(cabca, bba, aabcbc) \in A_1^* \times A_2^* \times A_3^*$



- contrôle unique (non déterministe)
- toutes les têtes en lecture uniquement
- déplacement des têtes de lecture de gauche à droite
- arrêt uniquement sur les marqueurs de fin

Automates à n bandes (vision machines de Turing)

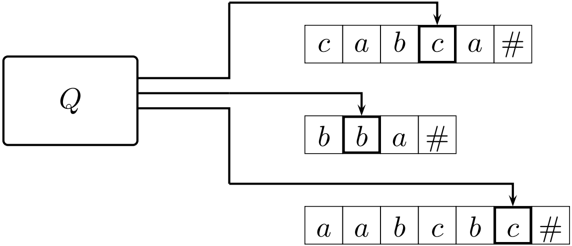
Calcul sur l'entrée $(cabca, bba, aabcbc) \in A_1^* \times A_2^* \times A_3^*$



- contrôle unique (non déterministe)
- toutes les têtes en lecture uniquement
- déplacement des têtes de lecture de gauche à droite
- arrêt uniquement sur les marqueurs de fin

Automates à n bandes (vision machines de Turing)

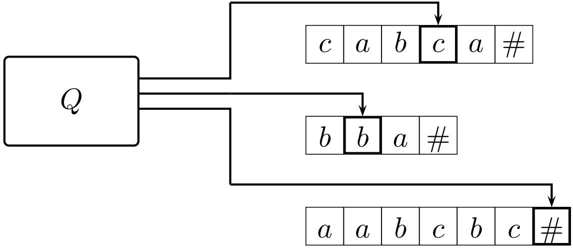
Calcul sur l'entrée $(cabca, bba, aabcbc) \in A_1^* \times A_2^* \times A_3^*$



- contrôle unique (non déterministe)
- toutes les têtes en lecture uniquement
- déplacement des têtes de lecture de gauche à droite
- arrêt uniquement sur les marqueurs de fin

Automates à n bandes (vision machines de Turing)

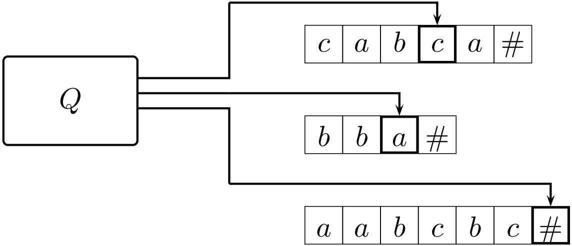
Calcul sur l'entrée $(cabca, bba, aabcbc) \in A_1^* \times A_2^* \times A_3^*$



- contrôle unique (non déterministe)
- toutes les têtes en lecture uniquement
- déplacement des têtes de lecture de gauche à droite
- arrêt uniquement sur les marqueurs de fin

Automates à n bandes (vision machines de Turing)

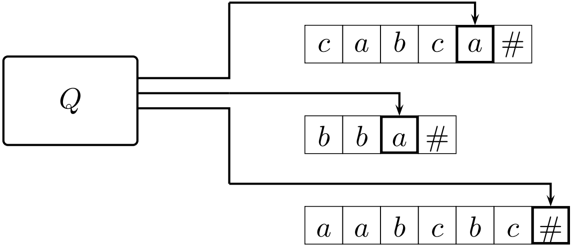
Calcul sur l'entrée $(cabca, bba, aabcbc) \in A_1^* \times A_2^* \times A_3^*$



- contrôle unique (non déterministe)
- toutes les têtes en lecture uniquement
- déplacement des têtes de lecture de gauche à droite
- arrêt uniquement sur les marqueurs de fin

Automates à n bandes (vision machines de Turing)

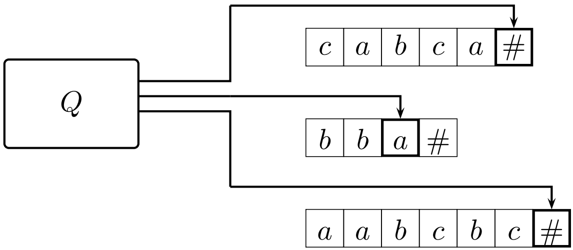
Calcul sur l'entrée $(cabca, bba, aabcbc) \in A_1^* \times A_2^* \times A_3^*$



- contrôle unique (non déterministe)
- toutes les têtes en lecture uniquement
- déplacement des têtes de lecture de gauche à droite
- arrêt uniquement sur les marqueurs de fin

Automates à n bandes (vision machines de Turing)

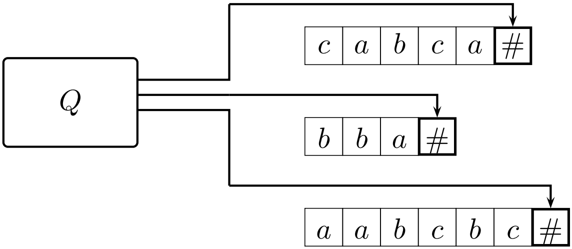
Calcul sur l'entrée $(cabca, bba, aabcbc) \in A_1^* \times A_2^* \times A_3^*$



- contrôle unique (non déterministe)
- toutes les têtes en lecture uniquement
- déplacement des têtes de lecture de gauche à droite
- arrêt uniquement sur les marqueurs de fin

Automates à n bandes (vision machines de Turing)

Calcul sur l'entrée $(cabca, bba, aabcbc) \in A_1^* \times A_2^* \times A_3^*$



- contrôle unique (non déterministe)
- toutes les têtes en lecture uniquement
- déplacement des têtes de lecture de gauche à droite
- arrêt uniquement sur les marqueurs de fin

Automates à n bandes (vision automates)

Automate sur le monoïde $M = A_1^* \times \cdots \times A_n^*$ avec des transitions de la forme suivante.

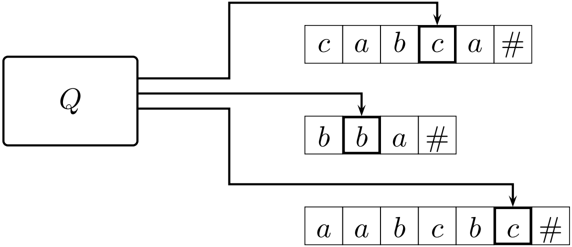
$$p \xrightarrow{(\varepsilon, \ldots, \varepsilon, a, \varepsilon, \ldots, \varepsilon)} q$$

Théorème (Kleene)

Une relation $R \subseteq M$ est accepté par un automate si et seulement si elle est rationnelle (décrite par une expression rationnelle).

On note $\mathrm{Rat}(M)$ l'ensemble des relations rationnelles.

Automates déterministes à n bandes



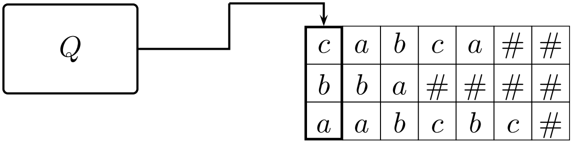
- contrôle déterministe
- nécessité d'un marqueur de fin (dans la vision automate)

Exemples

- $\{(a^n, b^n) \mid n \geq 0\}$ et $\{(a^n, b^{2n}) \mid n \geq 0\}$ sont déterministes
- $\{(a^n, b^n) \mid n \geq 0\} \cup \{(a^n, b^{2n}) \mid n \geq 0\}$ n'est pas déterministe

On note $\mathrm{DRat}(M)$ l'ensemble des relations acceptées par un automate déterministe.

Automates synchrones à n bandes



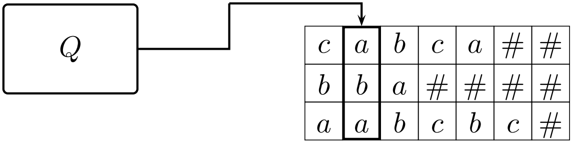
- déplacement synchrone des têtes de lecture
- ajout de marqueurs de fin pour avoir des mots de même longueur

Exemples

- $\{(a^n, b^n) \mid n \geq 0\}$ et $\{(u, v) \mid u$ préfixe de $v\}$ sont synchrones
- $\{(a^n, b^{2n}) \mid n \geq 0\}$ n'est pas synchrone
- $((a, ab) + (b, b))^*$ n'est pas synchrone

On note $\mathrm{Sync}(M)$ l'ensemble des relations acceptées par un automate synchrone.

Automates synchrones à n bandes



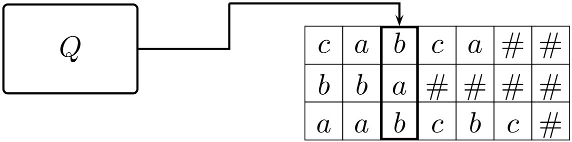
- déplacement synchrone des têtes de lecture
- ajout de marqueurs de fin pour avoir des mots de même longueur

Exemples

- $\{(a^n, b^n) \mid n \geq 0\}$ et $\{(u, v) \mid u$ préfixe de $v\}$ sont synchrones
- $\{(a^n, b^{2n}) \mid n \geq 0\}$ n'est pas synchrone
- $((a, ab) + (b, b))^*$ n'est pas synchrone

On note $\mathrm{Sync}(M)$ l'ensemble des relations acceptées par un automate synchrone.

Automates synchrones à n bandes



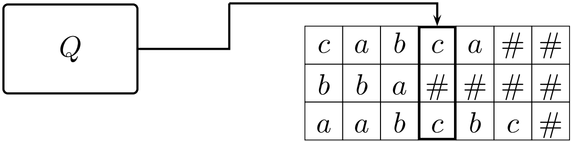
- déplacement synchrone des têtes de lecture
- ajout de marqueurs de fin pour avoir des mots de même longueur

Exemples

- $\{(a^n, b^n) \mid n \geq 0\}$ et $\{(u, v) \mid u \text{ préfixe de } v\}$ sont synchrones
- $\{(a^n, b^{2n}) \mid n \geq 0\}$ n'est pas synchrone
- $((a, ab) + (b, b))^*$ n'est pas synchrone

On note $\mathrm{Sync}(M)$ l'ensemble des relations acceptées par un automate synchrone.

Automates synchrones à n bandes



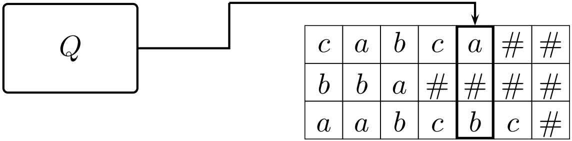
- déplacement synchrone des têtes de lecture
- ajout de marqueurs de fin pour avoir des mots de même longueur

Exemples

- $\{(a^n, b^n) \mid n \geq 0\}$ et $\{(u, v) \mid u$ préfixe de $v\}$ sont synchrones
- $\{(a^n, b^{2n}) \mid n \geq 0\}$ n'est pas synchrone
- $((a, ab) + (b, b))^*$ n'est pas synchrone

On note $\mathrm{Sync}(M)$ l'ensemble des relations acceptées par un automate synchrone.

Automates synchrones à n bandes



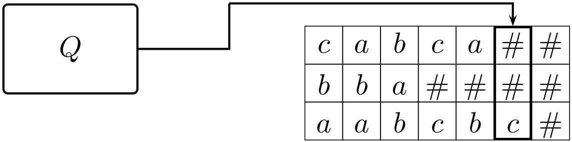
- déplacement synchrone des têtes de lecture
- ajout de marqueurs de fin pour avoir des mots de même longueur

Exemples

- $\{(a^n, b^n) \mid n \geq 0\}$ et $\{(u, v) \mid u$ préfixe de $v\}$ sont synchrones
- $\{(a^n, b^{2n}) \mid n \geq 0\}$ n'est pas synchrone
- $((a, ab) + (b, b))^*$ n'est pas synchrone

On note $\mathrm{Sync}(M)$ l'ensemble des relations acceptées par un automate synchrone.

Automates synchrones à n bandes



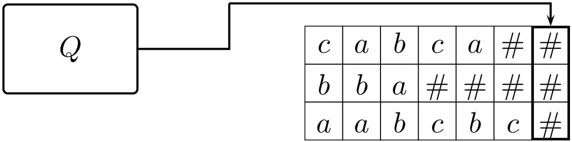
- déplacement synchrone des têtes de lecture
- ajout de marqueurs de fin pour avoir des mots de même longueur

Exemples

- $\{(a^n, b^n) \mid n \geq 0\}$ et $\{(u, v) \mid u$ préfixe de $v\}$ sont synchrones
- $\{(a^n, b^{2n}) \mid n \geq 0\}$ n'est pas synchrone
- $((a, ab) + (b, b))^*$ n'est pas synchrone

On note $\mathrm{Sync}(M)$ l'ensemble des relations acceptées par un automate synchrone.

Automates synchrones à n bandes



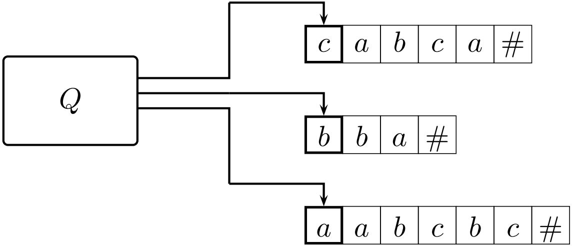
- déplacement synchrone des têtes de lecture
- ajout de marqueurs de fin pour avoir des mots de même longueur

Exemples

- $\{(a^n, b^n) \mid n \geq 0\}$ et $\{(u, v) \mid u \text{ préfixe de } v\}$ sont synchrones
- $\{(a^n, b^{2n}) \mid n \geq 0\}$ n'est pas synchrone
- $((a, ab) + (b, b))^*$ n'est pas synchrone

On note $\mathrm{Sync}(M)$ l'ensemble des relations acceptées par un automate synchrone.

Automates décentralisés à n bandes

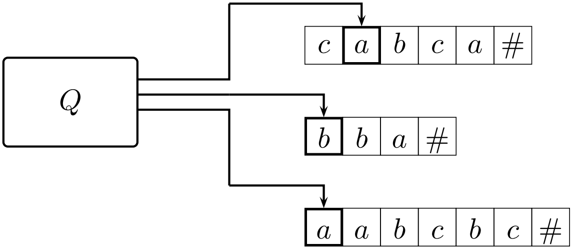


- déplacements séquentiels des têtes de lecture

Exemples

- $R = (aA^* \times A^*a) \cup (bA^* \times A^*b)$ est reconnaissable
- $R = \bigcup_{i=1}^{n} K_i \times L_i$ est reconnaissable si les K_i et L_i sont rationnels
- la diagonale $\{(u, u) \mid u \in A^*\}$ n'est pas reconnaissable

Automates décentralisés à n bandes

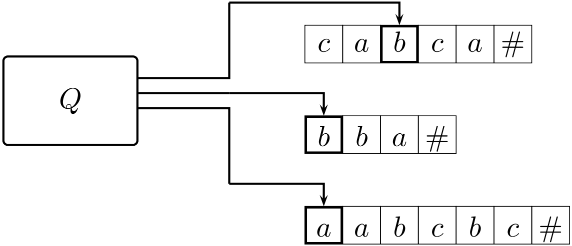


- déplacements séquentiels des têtes de lecture

Exemples

- $R = (aA^* \times A^*a) \cup (bA^* \times A^*b)$ est reconnaissable
- $R = \bigcup_{i=1}^{n} K_i \times L_i$ est reconnaissable si les K_i et L_i sont rationnels
- la diagonale $\{(u, u) \mid u \in A^*\}$ n'est pas reconnaissable

Automates décentralisés à n bandes

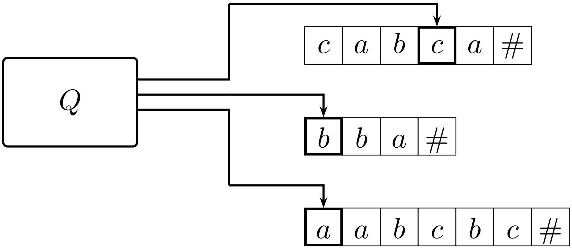


- déplacements séquentiels des têtes de lecture

Exemples

- $R = (aA^* \times A^*a) \cup (bA^* \times A^*b)$ est reconnaissable
- $R = \bigcup_{i=1}^{n} K_i \times L_i$ est reconnaissable si les K_i et L_i sont rationnels
- la diagonale $\{(u, u) \mid u \in A^*\}$ n'est pas reconnaissable

Automates décentralisés à n bandes

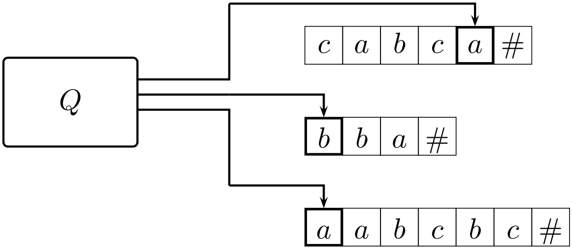


- déplacements séquentiels des têtes de lecture

Exemples

- $R = (aA^* \times A^*a) \cup (bA^* \times A^*b)$ est reconnaissable
- $R = \bigcup_{i=1}^{n} K_i \times L_i$ est reconnaissable si les K_i et L_i sont rationnels
- la diagonale $\{(u,u) \mid u \in A^*\}$ n'est pas reconnaissable

Automates décentralisés à n bandes

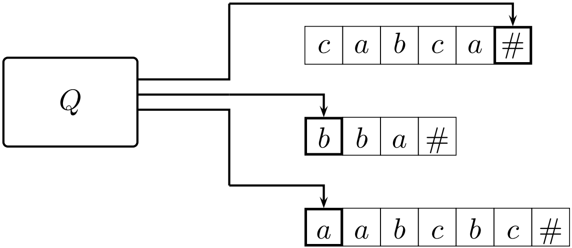


- déplacements séquentiels des têtes de lecture

Exemples

- $R = (aA^* \times A^*a) \cup (bA^* \times A^*b)$ est reconnaissable
- $R = \bigcup_{i=1}^{n} K_i \times L_i$ est reconnaissable si les K_i et L_i sont rationnels
- la diagonale $\{(u, u) \mid u \in A^*\}$ n'est pas reconnaissable

Automates décentralisés à n bandes

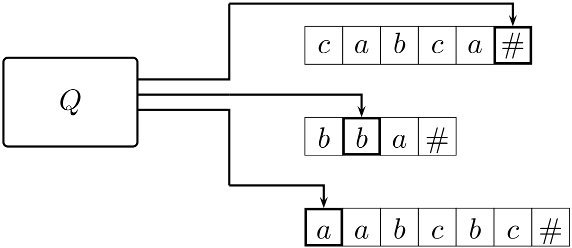


- déplacements séquentiels des têtes de lecture

Exemples

- $R = (aA^* \times A^*a) \cup (bA^* \times A^*b)$ est reconnaissable
- $R = \bigcup_{i=1}^{n} K_i \times L_i$ est reconnaissable si les K_i et L_i sont rationnels
- la diagonale $\{(u, u) \mid u \in A^*\}$ n'est pas reconnaissable

Automates décentralisés à n bandes

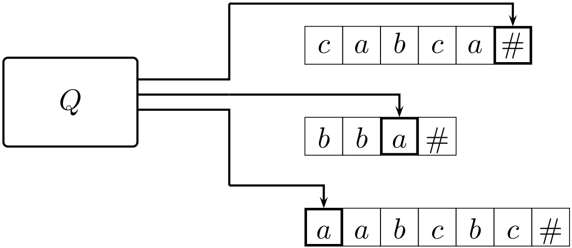


- déplacements séquentiels des têtes de lecture

Exemples

- $R = (aA^* \times A^*a) \cup (bA^* \times A^*b)$ est reconnaissable
- $R = \bigcup_{i=1}^{n} K_i \times L_i$ est reconnaissable si les K_i et L_i sont rationnels
- la diagonale $\{(u, u) \mid u \in A^*\}$ n'est pas reconnaissable

Automates décentralisés à n bandes

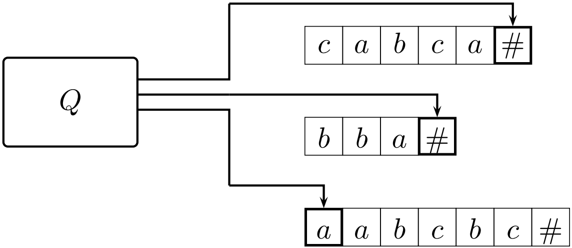


- déplacements séquentiels des têtes de lecture

Exemples

- $R = (aA^* \times A^*a) \cup (bA^* \times A^*b)$ est reconnaissable
- $R = \bigcup_{i=1}^{n} K_i \times L_i$ est reconnaissable si les K_i et L_i sont rationnels
- la diagonale $\{(u,u) \mid u \in A^*\}$ n'est pas reconnaissable

Automates décentralisés à n bandes

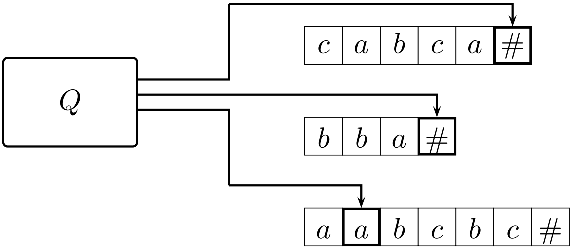


- déplacements séquentiels des têtes de lecture

Exemples

- $R = (aA^* \times A^*a) \cup (bA^* \times A^*b)$ est reconnaissable
- $R = \bigcup_{i=1}^{n} K_i \times L_i$ est reconnaissable si les K_i et L_i sont rationnels
- la diagonale $\{(u, u) \mid u \in A^*\}$ n'est pas reconnaissable

Automates décentralisés à n bandes

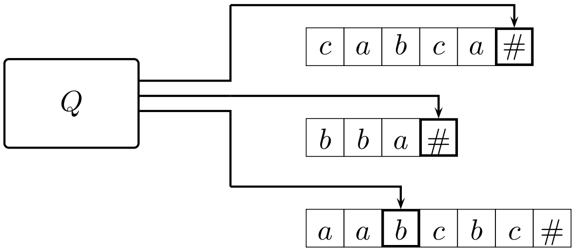


- déplacements séquentiels des têtes de lecture

Exemples

- $R = (aA^* \times A^*a) \cup (bA^* \times A^*b)$ est reconnaissable
- $R = \bigcup_{i=1}^{n} K_i \times L_i$ est reconnaissable si les K_i et L_i sont rationnels
- la diagonale $\{(u, u) \mid u \in A^*\}$ n'est pas reconnaissable

Automates décentralisés à n bandes

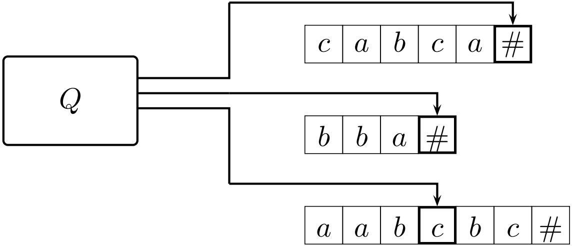


- déplacements séquentiels des têtes de lecture

Exemples

- $R = (aA^* \times A^*a) \cup (bA^* \times A^*b)$ est reconnaissable
- $R = \bigcup_{i=1}^{n} K_i \times L_i$ est reconnaissable si les K_i et L_i sont rationnels
- la diagonale $\{(u, u) \mid u \in A^*\}$ n'est pas reconnaissable

Automates décentralisés à n bandes

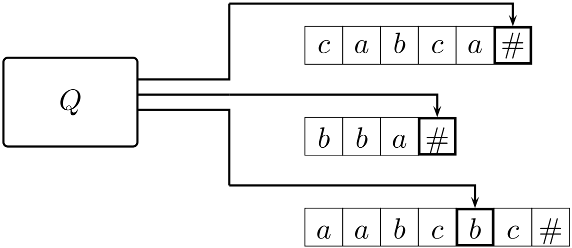


- déplacements séquentiels des têtes de lecture

Exemples

- $R = (aA^* \times A^*a) \cup (bA^* \times A^*b)$ est reconnaissable
- $R = \bigcup_{i=1}^{n} K_i \times L_i$ est reconnaissable si les K_i et L_i sont rationnels
- la diagonale $\{(u, u) \mid u \in A^*\}$ n'est pas reconnaissable

Automates décentralisés à n bandes

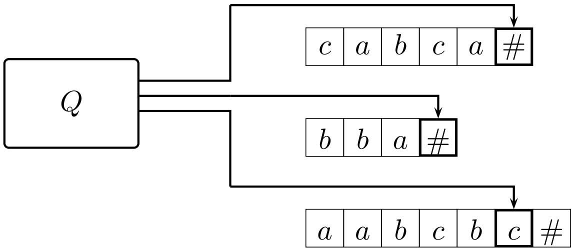


- déplacements séquentiels des têtes de lecture

Exemples

- $R = (aA^* \times A^*a) \cup (bA^* \times A^*b)$ est reconnaissable
- $R = \bigcup_{i=1}^{n} K_i \times L_i$ est reconnaissable si les K_i et L_i sont rationnels
- la diagonale $\{(u, u) \mid u \in A^*\}$ n'est pas reconnaissable

Automates décentralisés à n bandes

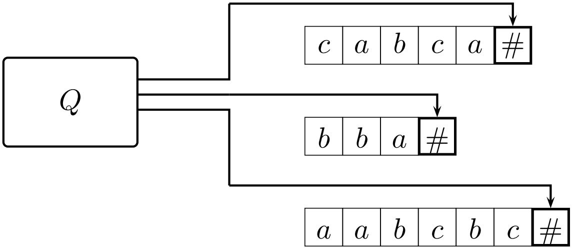


- déplacements séquentiels des têtes de lecture

Exemples

- $R = (aA^* \times A^*a) \cup (bA^* \times A^*b)$ est reconnaissable
- $R = \bigcup_{i=1}^{n} K_i \times L_i$ est reconnaissable si les K_i et L_i sont rationnels
- la diagonale $\{(u, u) \mid u \in A^*\}$ n'est pas reconnaissable

Automates décentralisés à n bandes

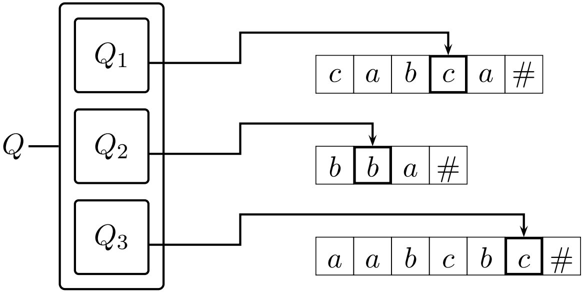


- déplacements séquentiels des têtes de lecture

Exemples

- $R = (aA^* \times A^*a) \cup (bA^* \times A^*b)$ est reconnaissable
- $R = \bigcup_{i=1}^{n} K_i \times L_i$ est reconnaissable si les K_i et L_i sont rationnels
- la diagonale $\{(u,u) \mid u \in A^*\}$ n'est pas reconnaissable

Automates décentralisés à n bandes (autre vision)



- un état de contrôle pour chaque bande : $Q = Q_1 \times \cdots \times Q_n$

On note $\mathrm{Rec}(M)$ l'ensemble des relations acceptées par un automate décentralisé.

La hiérarchie stricte

$$M = A_1^* \times \cdots \times A_n^*$$

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{Rec}(M) & \subset & \mathrm{Sync}(M) & \subset & \mathrm{DRat}(M) & \subset & \mathrm{Rat}(M) \\ \mathcal{F}_0 & & \mathcal{F}_1 & & \mathcal{F}_2 & & \mathcal{F}_3 \end{array}$$

INCLUSION-I-DANS-J
Entrée : $R \in \mathcal{F}_j$
Question : $R \in \mathcal{F}_i$?

Les différents cas

Pour éliminer les cas triviaux, on suppose

- $n \geq 2$
- $|A_i| \geq 1$ pour chaque $1 \leq i \leq n$.

Il y a deux situations très différentes.

- $|A_1| = \cdots = |A_n| = 1$: tous les alphabets sont de cardinalité 1. Le monoïde $M = A_1^* \times \cdots \times A_n^*$ est commutatif : $M \approx \mathbb{N}^n$.
- $|A_1| \geq 2$: M est non commutatif
  - $|A_2| = \cdots = |A_n| = 1$: un seul des alphabets est de cardinalité supérieure ou égale à 2.
  - $|A_2| \geq 2$: au moins deux des alphabets sont de cardinalité supérieure ou égale à 2.

Cas non commutatif ($|A_1| \geq 2$)

Les résultats dans la littérature (cas non commutatif)

	$\mathrm{Rat}(M)$	$\mathrm{DRat}(M)$
$\mathrm{DRat}(M)$	indécidable Fischer, Rosenberg 1967 Lisovik 1979	
$\mathrm{Sync}(M)$	indécidable idem	ouvert
$\mathrm{Rec}(M)$	indécidable idem	décidable sur $A^* \times B^*$ Stearns 67 $2^{2^{2^{O(n)}}}$ Valiant 76 $2^{2^{O(n)}}$

Les résultats nouveaux

	DRat(M)	Sync(M)
Rec(M)	décidable Carton, Choffrut Grigorieff 2006	décidable en $2^{0(n)}$ Carton, Choffrut Grigorieff 2006

Le paysage actuel (cas non commutatif)

	Rat(M)	DRat(M)	Sync(M)
DRat(M)	indécidable Fischer, Rosenberg 1967 Lisovik 1979		
Sync(M)	indécidable idem	ouvert	
Rec(M)	indécidable idem	décidable Carton, Choffrut Grigorieff 2006	décidable en $2^{0(n)}$ Carton, Choffrut Grigorieff 2006

Relations comme langages (cas binaire $A^* \times B^*$)

Correspondance relation $\leftrightarrow$ langage.

$$R \subseteq A^* \times B^* \mapsto L_R \in A^*\#B^*$$

où

$$L_R = \{\tilde{u}\#v \in A^*\#B^* \mid (u,v) \in R\}$$

- R est une relation rationnelle ssi L_R est un langage linéaire avec unique production finale $X \to \#$.
- Si R est une relation rationnelle déterministe alors L_R est un langage à pile déterministe.
- R est une relation reconnaissable ssi L_R est un langage reconnaissable

Résultat de Stearns

Théorème (Stearns 1967)

On peut décider si un langage spécifié par un automate à pile déterministe est reconnaissable.

- Très jolie preuve (majorer la hauteur de pile)
- Complexité de la procédure : 3 niveaux d'exponentielles
- La complexité a été abaissée à 2 niveaux d'exponentielles par Valiant en 1976 (apparemment optimal, voir Meyer et Fischer 1971)
- On peut donc décider si une relation déterministe binaire est reconnaissable.

Tirer parti de vieux résultats

Notation : pour $u \in A_1^*$ et $R \subseteq A_1^* \times \cdots \times A_n^*$ on pose

$$R(u) = \{x \in A_2^* \times \cdots \times A_n^* \mid (u, x) \in R\}$$

Proposition

Une relation $R \subseteq A_1^* \times \cdots \times A_n^*$ déterministe est reconnaissable ssi il existe un entier ℓ tel que

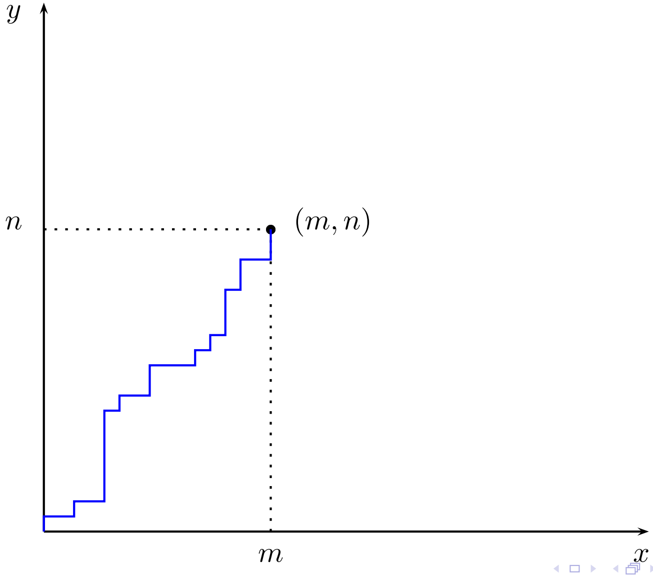
- *pour tout $u \in A_1^*$: $|u| \leq \ell \Rightarrow R(u) \in \mathrm{Rec}(A_2^* \times \cdots \times A_n^*)$*
- *pour tout $v \in A_1^*$ il existe $u \in A_1^*$, $|u| \leq \ell$, tel que $R(u) = R(v)$*

Cas commutatif ($|A_1| = \cdots = |A_n| = 1$)

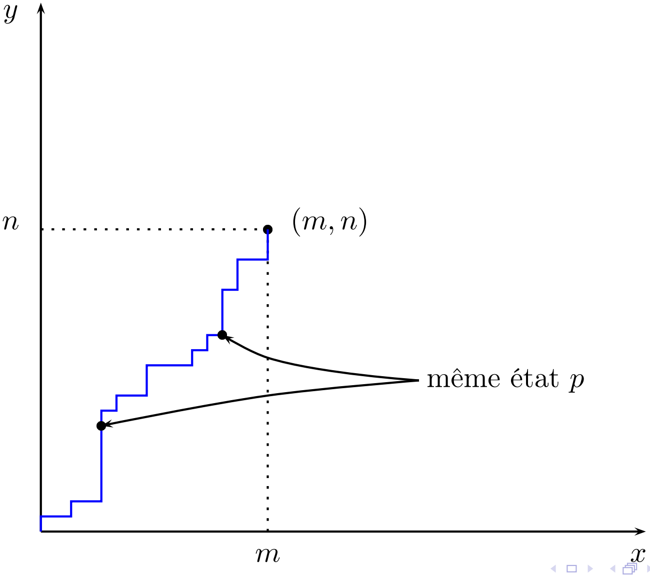
Le paysage actuel (cas commutatif)

	$\mathrm{Rat}(M)$
$\mathrm{DRat}(M)$	décidable Carton, Choffrut Grigorieff 2006
$\mathrm{Sync}(M)$	décidable idem
$\mathrm{Rec}(M)$	décidable Ginsburg, Spanier 67

Calcul dans $\mathbb{N}^2$

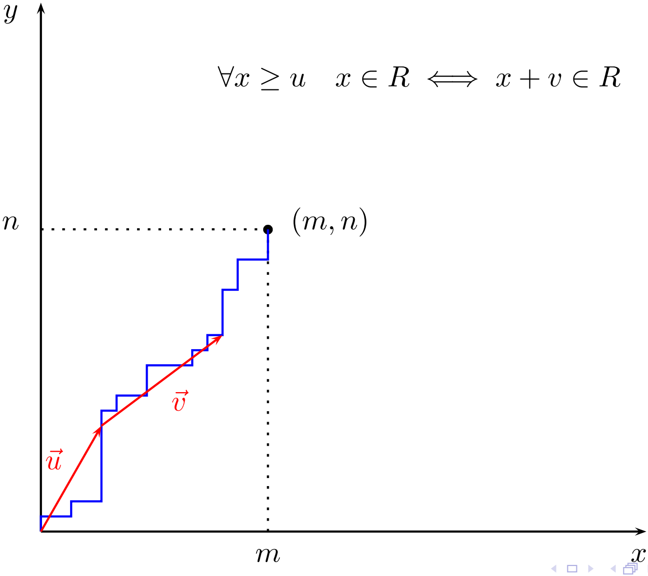


Calcul dans $\mathbb{N}^2$

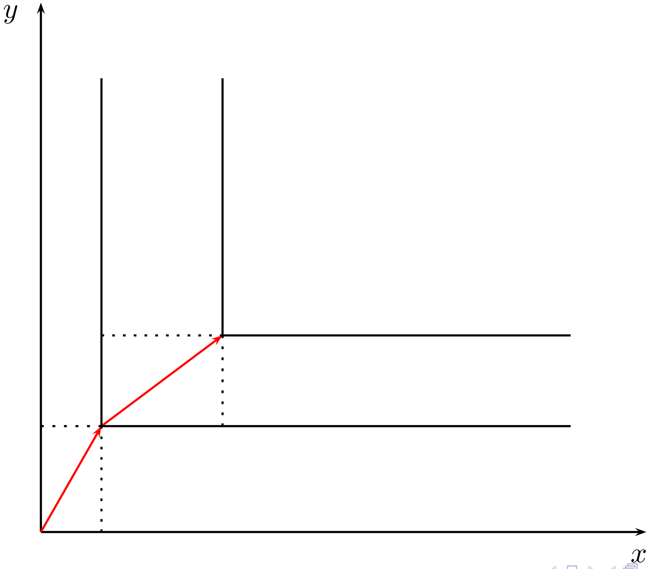


Calcul dans $\mathbb{N}^2$

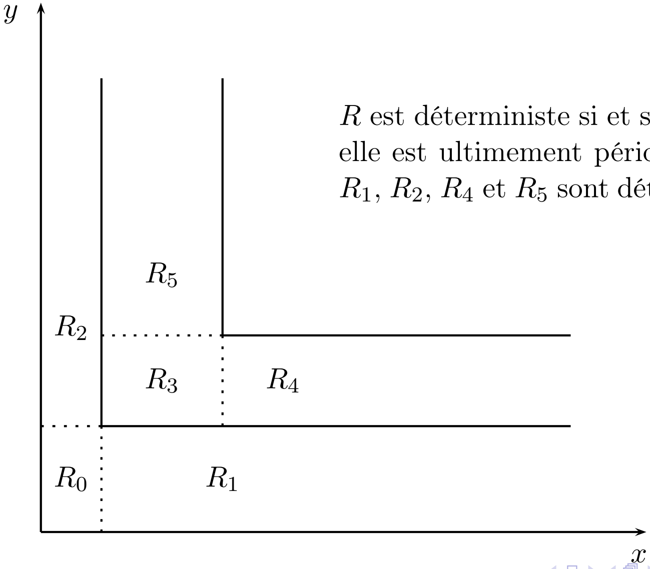
$$\forall x \geq u \quad x \in R \iff x + v \in R$$



Calcul dans $\mathbb{N}^2$



Calcul dans $\mathbb{N}^2$



R est déterministe si et seulement si elle est ultimement périodique et si R_1, R_2, R_4 et R_5 sont déterministes.

Réduction à Presburger

Si R est donné par la formule $\theta(x;b)$

$$R = \{x \in \mathbb{N}^k \mid \theta(x;b)\}$$

On construit la formule $\Psi_\theta(b)$

$$\begin{aligned}\Psi_\theta(b) = \exists\mu\ \exists\pi\ \ (\forall x \geq 0 \quad \theta(x+\mu;b) \iff \theta(x+\mu+\pi;b) \wedge \\ \forall u < \mu\ \ \forall v < \pi \quad \bigwedge_{\varnothing \neq I \subseteq \{1,\ldots,k\}} \\ (\mathrm{Null}(\mu - u) = I \implies \Psi_{\theta'_I}(b,\mu,u)) \\ (\mathrm{Null}(\pi - v) = I \implies \Psi_{\theta'_I}(b,\mu+\pi,\mu+v)))\end{aligned}$$

qui est satisfiable si et seulement si R est déterministe.