Witold Hurewicz et les automates

Alain Hertzog, Pierre Simonnet
Faculté des Sciences, Université de Corse B.P. 52 20250 CORTE FRANCE

hertzog@univ-corse.fr, simonnet@univ-corse.fr

Résumé

Cet article est la continuation de l'essai sur Baire et les automates présenté aux journées montoises précédentes. Nous y présentons, sous forme historique, les liens entre ordinaux dénombrables, ensembles coanalytiques, jeux et automates d'arbre infinis. On sait, depuis D.Niwinski, que l'on peut définir un ensemble coanalytique non borélien à l'aide d'un automate d'arbre mais l'on sait peut être moins chez les informaticiens qu'un résultat similaire dû à Hurewicz existait depuis 1927. L'ensemble des compacts de [0,1] inclus dans l'ensemble des rationnels est un coanalytique complet. Nous nous appuierons sur le livre *Descriptive set theory and the structure of sets of uniqueness* de A. Kechris et A. Louveau. Notre but est de prouver que l'on peut extraire des connaissances sur les automates d'arbres en lisant les travaux sur les σ-idéaux de compacts des analystes. En 1982, A.S. Kechris a conjoncturé que le σ-idéal U des compacts d'unicité n'était pas borélien. Cette conjecture a été prouvé en 1983 par R. Solovay (et de manière indépendante par R. Kaufman en 1984). Sa preuve utilise en particulier le théoreme de Salem Zygmund liant les ensembles d'unicité aux nombre de Pisot.

key words : closed sets of unicity, coanalytic sets, rabin tree automata, σ-ideal of compact sets

1 Introduction

Je veux dédier cet article à la mémoire de Gilbert Walusinski mon professeur de Mathématiques de cinquième qui nous a quitté au début de cette d'année 2006. Promoteur de la réforme des maths modernes, il fut avec d'autres à l'origine de l'introduction des ensembles en classe de sixième, et franchement je calculais plus vite dans le semi-anneau de boole, qu'en base 10. Cet article est écrit à deux, un véritable analyste le premier auteur, et un hybride moi même. Alain pour me rassurer et réaliser un vieux rève, apprendre l'autre versant de théorèmes aperçus lors d'un séminaire. Revenons en arrière octobre 1984, je passe dans un couloir de Jussieu un titre m'attire jeux de Mistigri. Je suis au laboratoire de la théorie du potentiel, Gustave Choquet et ses élèves. L'un d'eux, Alain Louveau, enseigne la théorie effective des ensembles boréliens, une partie de ce qu'on trouve dans le livre de Moschovakis *Descriptive Set Theory* [28], il organise un groupe de travail sur ce sujet et expose à ce groupe, avant les deux scéances sur les jeux de Mistigri, deux autres scéances sur la théorie des σ-ideaux de compacts avec des applications à l'étude des ensembles d'unicités. Lors de la première scéance je découvre que $K(\mathbb{Q})$ l'ensemble des compacts de 2^ω qui sont inclus dans $\mathbb{Q} = \{\alpha \in 2^\omega | \ \exists m \ \forall n \geq m \ \alpha(n) = 0\}$ est un coanalytique complet. La notation $\mathbb{Q}$ pour les parties finies de $\mathbb{N}$ souligne que c'est un ensemble dénombrable dense comme les rationnels. Le théorème en fait date de 1927, l'ensemble des compacts de [0,1] inclus dans l'ensemble des rationnels est un coanalytique complet. Ce résultat est dû à Witold Hurewicz, mathématicien polonais né en 1904 à Lodz et décédé en 1956 à Mexico. A l'époque je ne compris rien au quatre scéances successives sauf que l'on parlait des compacts d'un ensemble reconnaissable par automate de Büchi, puis que l'on jouait contre ce même ensemble. L'article *Baire et les automates* traitait entre autres des analogies entre les travaux d'Alain Louveau et Jean Saint Raymond, les jeux de Mistigri, et les travaux de Landweber. On y

soulignait en particulier le lien entre la hiérarchie de Wadge et la hiérarchie de Wagner, puis on y abordait le lien entre ensembles coanalytiques et ordinaux dénombrables, objet pour lequel j'ai toujours eu une fascination répulsion. Ce nouvel article voudrait reprendre de manière historique et intuitive ce lien qui est présent dans la théorie des automates d'arbres infini. Première preuve par induction transfinie chez Cantor, lors de l'étude de l'unicité des coefficients d'une série trigonométrique. Découverte par Suslin qu'il existe des ensembles analytiques (projection d'un ensemble borélien) non boréliens. Mise en évidence par Lusin et Sierpinski du lien entre ensembles coanalytiques (complémentaires d'ensemble analytiques) et ordinaux dénombrables. Premiers exemples dans l'analyse d'ensemble coanalytiques complets donnés par Hurewicz : $K(\mathbb{Q})$ et $K_\omega([0,1])$, l'ensemble des compacts dénombrables de $[0,1]$. Travaux de Rabin sur les automates d'arbres, décidabilité de $S2S$. Travaux de Solovay et Kaufman sur les compacts d'unicités. Intérèt de l'étude de ces travaux pour les automates d'arbres.

Witold Hurewicz commença ses études à l'université de Varsovie puis les continua à l'université de Vienne sous la direction de Hans Hahn et de Karl Menger. Il obtint son doctorat en 1926, puis fut l'assistant de Brouwer à Amsterdam de 1928 à 1936. Il poursuivit sa carrière aux Etats Unis où il contribua à l'effort de guerre américain, par des recherches sur la stabilité des systèmes linéaires discrets. C'est à ce titre qu'il est cité au chapitre 16 *linear sequential machine* du livre de Samuel Eilenberg *Automata Languages and Machines* [8, 14, 9]. De 1945 jusqu'à sa mort, il travailla au MIT. Witold Hurewicz fit une chute d'une pyramide mexicaine lors d'un colloque sur la topologie algébrique et en mourut.

2 Premier Travaux d'Hurewicz

Les premiers travaux de Witold Hurewicz portent sur la théorie descriptive des ensembles et sont intéressants pour la théorie des automates. Nous discuterons en particulier de trois théorèmes.

Le premier énonce que tout ensemble dénombrable dense D d'un espace métrique compact non dénombrable E est $\mathbf{\Sigma}^0_2$ complet. La notation $\mathbf{\Sigma}^0_2$, due à Addison, remplace la notation F_σ des anciens, $\mathbf{\Sigma}^0_2(E)$ est la classe des réunions dénombrables de fermés de E. Dire que D est $\mathbf{\Sigma}^0_2$ complet signifie que D est $\mathbf{\Sigma}^0_2$ et que l'on peut obtenir tous les $\mathbf{\Sigma}^0_2$ de E à partir de D par image réciproque de fonctions continues. Le théorème s'applique donc en particulier à l'ensemble reconnaissable par automate de Büchi $\mathbb{Q} = \{\alpha \in 2^\omega | \ \exists m \ \forall n \geq m \ \alpha(n) = 0\}$, puisque $\mathbb{Q}$ est un sous ensemble dénombrable dense de l'espace de Cantor 2^ω.

Le deuxième théorème mérite une préparation à la notion d'Hurewicz test. Le mathématicien polonais Kazimierz Kuratowski a établi la caractérisation suivante des graphes planaires :
Un graphe fini est planaire si et seulement si il ne contient pas de sous-graphe qui est une expansion de K5 (la clique à 5 sommets) ou K3,3 (le graphe complet biparti à 3+3 sommets). L'expansion d'un graphe est le résultat de l'ajout d'un ou plusieurs sommets sur une ou plusieurs arêtes. Ce résultat peu donner l'intuition de ce qui passe lorsque on veut savoir si un ensemble est d'une certaine classe borélienne. En théorie descriptive des ensembles, pour montrer qu'un ensemble est compliqué, il est usuel de noter qu'il est plus compliqué qu'un exemple bien connu. Si un ensemble A dans un espace métrique n'est pas fermé il contient une suite (x_n) qui converge vers un point x n'appartenant pas à A. Considérons le compact C formé d'une suite convergente et de sa limite dans 2^ω en la choisissant la plus simple possible, par exemple $C = \{0^\omega\} \ \cup \ \{0^n 1 0^\omega\}$. On a alors la dichotomie suivante.

Théorème 2.1. *Soit $A \subset 2^\omega$ Borélien, alors une et une seulement des assertions suivantes est vraie :*

i) A est fermé

ii) Il existe une fonction continue injective $u : C \longrightarrow 2^\omega$ tel que $u^{-1}(A) = \{0^n 1 0^\omega\}$

Le cas fermé est donc assez compréhensible. Rappelons maintenant qu'un ensemble Polonais est (en gros) un espace métrique complet séparable. L'espace polonais de référence est l'espace de Baire ω^ω, i.e., l'espace des suites infinies d'entiers qui est homéomorphe à l'ensemble reconnaissable par automate de Buchi déterministe $\check{\mathbb{Q}} = \{\alpha \in 2^\omega | \ \forall m \ \exists n > m \ \alpha(n) = 1\}$ le complémentaire de $\mathbb{Q}$. On peut voir $\check{\mathbb{Q}}$ comme l'ensemble des fonctions caractéristiques des parties infinies de $\mathbb{N}$. Un ensemble A d'un espace Polonais P est analytique s'il est l'image continue de l'espace de Baire. Un ensemble est coanalytique si son complémentaire est analytique. On note $\mathbf{\Pi}^0_2(P)$, G_δ à l'ancienne, la classe des intersections dénombrables d'ouvert du Polonais P.

Théorème 2.2. *(Hurewicz) Soit B un sous ensemble coanalytique d'un compact métrisable E, alors une et une seulement des assertions suivantes est vraie :*

i) B est $\mathbf{\Pi}^0_2(E)$

ii) Il existe une fonction continue injective $u : 2^\omega \longrightarrow E$ tel que $u^{-1}(B) = \mathbb{Q}$

Un ensemble analytique non F_σ contient comme fermé relatif un ensemble homéomorphe à l'espace de Baire, un ensemble homéomorphe à $\check{\mathbb{Q}} = \{\alpha \in 2^\omega | \ \forall m \ \exists n > m \ \alpha(n) = 1\}$. En fait $\mathbb{Q}$ est un Hurewicz test pour la classe $\mathbf{\Pi}^0_2(P)$. Ce théorème a été généralisé par Alain Louveau et Jean Saint Raymond à toutes les classes de Wadge Borélienne [25] dans des espaces polonais non dénombrables. Il serait dommage de ne pas remarquer que les ensembles tests d'Hurewicz peuvent être choisis reconnaissables par automates quand ils le peuvent. Et à contrario, il serait dommage de ne pas savoir que les invariants topologiques de Wagner, les chaines et les superchaines que l'on calcule sur les automates de mots infinis, donnent sur les ensemble ω-rationnels des versions fortes de théorème à la Hurewicz. Il nous semble que la même philosophie est à l'oeuvre dans les résultats récents de Damian Niwinski et Igor Walukiewicz sur les automates d'arbres déterministes.

Venons en maintenant au troisième théorème. Les analystes et les théoriciens descriptifs savent que si E est un espace métrique compact alors $K(E)$ l'espace des compacts de E est aussi un espace métrique compact, ah la topologie de Léopold Vietoris 1891 2002, ça conserve. Soit maintenant $\mathbb{Q}$ l'ensemble des rationnels de $\mathbb{R}$ et soit $\mathbb{Q}' = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ notons $K(\mathbb{Q}') = \{K \in K([0,1] \mid K \subset \mathbb{Q}'\}$ l'ensemble des compacts inclus dans les rationnels.

Théorème 2.3. *(Hurewicz) $K(\mathbb{Q}')$ est un ensemble coanalytique complet.*

En fait pour tout compact métrique non dénombrable E et tout sous ensemble dénombrable dense D de E, $K(D)$, l'ensemble des compacts de E inclus dans D, est un coanalytique complet. Ce résultat doit être absolument rapproché des travaux de Rabin [34, 35] et de Niwinski[29]. De ce résultat Hurewicz a déduit que pour tout espace métrique compact non dénombrable E , $K_\omega(E)$ l'ensemble des compacts dénombrable de E est un coanalytique complet.
Les théoriciens descriptifs des ensembles savent qu'ensembles coanalytiques et ordinaux dénombrables sont étroitement liés par la notion de rang coanalytique. La notion de rang est utile en analyse. Un rang sur un ensemble A est une fonction assignant à chaque élément de A un ordinal dénombrable. On sait que les ordinaux furent découvert par Cantor lors de travaux sur les séries trigonométriques. Riemann et Heine se posaient la question suivante : si une fonction f admet un développement trigonométrique $f(x) = \sum_n c_n e^{inx}$, est ce que ce développement est unique ? Cantor donna une solution positive à ce problème en 1870. Il fut alors amené à montrer que l'unicité était vraie même si l'on s'autorisait un fermé dénombrable de points exceptionnels. Ce fut à cette occasion qu'il introduisit l'élimination transfinie des points isolés d'un fermé de $\mathbb{R}$. La notion de rang est très utile en théorie descriptive des ensemble dans l'étude des ensembles coanalytiques. Lusin et Sierpinski montrèrent dans les années 1920 que l'ensemble des codes d'ordinaux dénombrables était le coanalytique complet. Puis Lusin montra le théorème de la borne. Les conditions de définissabilité de l'ordre associé ont conduit à la notion moderne, due à Moschovakis, de rang coanalytique. L'idée se comprend assez bien sur les compacts dénombrable de $[0,1]$

à chaque point de l'ensemble on associe un ordinal dénombrable, le nombre transfini de fois pour lequel en éliminant les points isolé du compact dénombrable on arrivera au vide. Ce rang est un rang coanalytique et le fait que $K_\omega([0,1])$ soit un vrai coanalytique, i.e., $K_\omega([0,1])$ n'est pas Borel s'obtient en montrant que ce rang n'est pas borné sous ω_1, c'est à dire que pour tout ordinal dénombrable ξ on peut trouver un compact dénombrable dont l'élimination des points isolés prend au moins le temps ξ. Avec Hurewicz, Lusin et Sierpinski la boucle amorcée par Cantor est bouclée. Les ordinaux dénombrables c'est compliqué parce que les codes d'ordinaux dénombrables forment un coanalytique complet. Les ordinaux dénombrables c'est compliqué parce que les codes d'ordinaux dénombrables forment un coanalytique non borélien. Les ordinaux dénombrables c'est compliqué parce que l'ensemble des codes d'ordinaux dénombrables peut se définir par une formule du second ordre, mais pas par une formule du premier ordre.

3 Ensembles d'Unicités

Venons en maintenant à la notion d'ensemble d'unicité. C'est une notion de petitesse. Le problème de l'unicité du développement trigonométrique peut se reformuler de la façon suivante :
Si $\sum_n c_n e^{inx} = 0$ est ce que tous les c_n valent 0 ? La réponse est oui c'est le théorème de Cantor. Un ensemble A du compact $[0,\pi]$ est d'unicité si toute série trigonométrique qui s'annule en dehors de A s'annule partout. D'après Cantor, les compacts dénombrables de $[0,\pi]$ sont des ensembles d'unicité. L'ensemble triadique de Cantor sur $[0,\pi]$ est un ensemble d'unicité car 3 est un nombre de Pisot. En effet, Salem et Zygmund définissent des ensembles parfaits $E(\xi;\eta_1,\ldots,\eta_k)$, de construction analogue à l'ensemble triadique de Cantor, et montrent le très beau résultat :

Théorème 3.1. *(Salem Zygmund) L'ensemble $E(\xi;\eta_1,\ldots,\eta_k)$ est d'unicité si et seulement si $\theta = 1/\xi$ est un nombre de Pisot et $\eta_1,\ldots,\eta_k \in \mathbb{Q}(\theta)$*

Solovay s'est servi, parmi d'autre choses, de ce résultat, pour montrer fin 1983, que U, l'ensemble des compacts d'unicité, était un coanalytique complet. De manière indépendante, R. Kaufman, qui étudiait le problème de représenter les analytiques bornés du plan complexe comme les valeurs propres d'un opérateur sur un espace de Banach, est arrivé au même résultat au début 1984. Les compacts d'unicités et $K_\omega([0,1])$ sont des exemples de σ-idéaux de compacts, i.e., si un compact est inclus dans une réunion dénombrable de compacts de l'ensemble alors il est dans l'ensemble. Kechris, Louveau et Woodin ont montré un théorème de dichotomie sur les σ-idéaux de compacts [17]. Nous pensons que ce résultat peut être mis en rapport avec le résultat de dichotomie de Niwinski et Walukiewicz sur les automates d'arbre déterministe [31].

Références

[1] R. Baire. *Oeuvres scientifiques* . Bordas, Paris 1990.

[2] J.R. Büchi. *On a decision method in restricted second order arithmetic.* Logic, Methodology and Philosophy of Science. Stanford Univ. Press, Stanford, Calif. 1962. 1-11.

[3] J.R. Büchi. *Using determinancy of games to eliminate quantifers.* Fundamentals of computation theory. Lecture Notes in Comput. Sci. vol. 56 Springer, Berlin 1977. 367-378.

[4] J.R. Büchi. *State-strategies for games in $F_{\sigma\delta} \bigcap G_{\delta\sigma}$.* J. Symbolic Logic 48, 4. 1984. 1171-1198.

[5] J.R. Büchi, L. H. Landweber. *Solving sequential condition by finite-state strategies.* Trans. Amer. Math. Soc. 138. 1969. 295-311.

[6] B. Cagnard, P Simonnet. *Automata Borel functions and real numbers in Pisot basis* . 6th conference on real numbers and computers (RNC6). 2004.

[7] P. Dugac. *Histoire de l'analyse.* Vuibert. 2003. 253-271.

[8] S. Eilenberg. *Automata, Languages and Machines Vol A.* Academic Press, New York London. 1974.

[9] S. Eilenberg. *Witold Hurewicz personal reminiscences.* Collected works of Witold Hurewicz Providence, R.I. 1995.

[10] C. Frougny. *Numeration Systems.* Chapter 8 of M. Lothaire, Algebraic Combinatorics on Words. Cambridge University Press. 2002.

[11] Y. Gurevitch, L. Harrington. *Trees Automata and Games.* Proc. ACM Symp. on Theory of Computing. 1982. 60-65.

[12] T. Hafer. *On the Boolean Closure of Büchi Tree Automaton Definable Set of ω-trees.* Aachener Inform. Ber., n° 87-16, R.W.T.H., Aachen. 1987.

[13] W. Hurewicz. *Relativ perfekte Teile von Punktmengen und Mengen.* Fund. Math. 12. 1928. 78-109.

[14] W. Hurewicz. *Filters and servo systems with pulsed data, Chapter 5, in theory of Servomechanisms.* M.I.T. Rad. Lab. Series, Fund. Math. 12. 1947. 231-261. MCGraw-Hill, New York.

[15] A. S. Kechris. *Classical Descriptive Set Theory.* Springer-Verlag. 1995.

[16] A. S. Kechris, A. Louveau. *Descriptive Set Theory and the Structure of Sets of Uniqueness.* Cambridge University Press. 1987.

[17] A. S. Kechris, A. Louveau, W. H. Woodin. *The Structure of σ-ideals of Compact Sets.* Trans. AMS. Soc. 301 (1). 263-288. 1987.

[18] C. Kuratowski. *Une méthode d'élimination des nombres transfinis des raisonnements mathématiques.* Fund. Math. 3. 1922. 100-.

[19] C. Kuratowski. *Topology.* vol I, Academic Press. 1966.

[20] L.H. Landweber. *Decision problem for ω-automata.* Math. Systems. Theory 3. 1969. 376-384.

[21] A. Louveau. *Ensemble Analytiques et Boréliens dans les Espaces Produits.* Asterisque S.M.F. 78. 1980.

[22] A. Louveau. *A separation theorem for Σ^1_1 sets.* Transaction A.M.S., 260. 1981. 363-378.

[23] A. Louveau. *Some results in the Wadge Hierarchy of Borel Sets.* Cabals Sem. 79-81, A.S. Kechris, D.A. Martin and Y.N.Moschovakis, Springer, Berlin. 1983. 28-55.

[24] A. Louveau. *Quantificateur de jeu et σ-ideal of compacts.* Séminaire de theorie effective Unversité Paris VI. 1987.

[25] A. Louveau, J. Saint Raymond. *Borel classes and closed games Wadge-type and Hurewicz-type results.* Transaction A.M.S. 304. 1987. 431-437.

[26] A. Louveau, J. Saint Raymond. *Les propriétés de réduction et de norme pour les classes de Boreliens.* Fundamenta Mathematica 131. 1988. 223-437.

[27] N. Lusin. *Leçons sur les Ensembles Analytiques et leurs Applications.* Gauthiers Villard. 1930.

[28] Y. N. Moschovakis. *Descriptive Set Theory.* North Holland, Amsterdam. 1980.

[29] D. Niwinski. *An Example of Non Borel Set of infinite Trees Recognizable by a Rabin Automaton, In Polish, Manuscrit.* University of Warsaw. 1985.

[30] D. Niwinski. *On the complexity of infinite computations.* Automata, Structures and Logic, Auckland. 2004.

[31] D. Niwinski, I. Walukiewicz. *A gap property of deterministic tree languages.* Theoretical Computer Science vol. 303(1) 215-231. 2003.

[32] D. Niwinski, I. Walukiewicz. *Deciding Nondeterministic Hierarchy of Deterministic Tree Automata.* ENTCS 123 195-208. 2004.

[33] D. Perrin, J.E. Pin. *Infinite words.* Academic Press. 2004.

[34] M. O. Rabin. *Decidability of Second Order Theories and Automata on Infinite Tree.* Trans. Amer. Math. Soc. 141. 1969. 1-35.

[35] M. O. Rabin. *Weakly Definable Relations and Special Automata.* Mathematical Logic and Foundations of Set Theory, North Holland, Amsterdam. 1970. 1-23.

[36] H. Rogers. *Theory of Recursive Functions and Effective Computability.* Mc Graw Hill, New York. 1967.

[37] J. Saint Raymond. *Boréliens à coupe K_σ.* Bull. Soc. Math. France, 104. 1976. 1-23.

[38] J. Saint Raymond. *Classification de Wadge.* Note d'exposé, fev 1989, Séminaire Initiation à l'Analyse, G. Choquet, G. Godefroy, M. Rogalski, J. Saint raymond 28 ième année. 1989.

[39] J. Sakarovitch. *Eléments de théorie des automates.* Vuibert informatique. 2003.

[40] V. Selivanov. *Fine hierarchy of regular ω-languages.* Theoret. Comput, 191, 1-2. 1998. 37-59.

[41] W. Sierpinski. *Les Ensembles Projectifs et Analytiques.* Mémorial des Sciences Mathématiques, fascicule CXII, Gauthier-Villard. 1950. 28-29.

[42] P. Simonnet. *Automate et théorie descriptive.* Ph.D. thesis, Université Paris 7, France. 1992.

[43] P. Simonnet. *Un théorème de séparation sur les ensembles rationnels de mots infinis.* C. R. Acad. Sci. Paris Paris, 316 Serie I . 1993. 201-203.

[44] P. Simonnet. *Automates d'arbres infinis et choix borélien.* C. R. Acad. Sci. Paris Paris, 316 Serie I . 1993. 97-100.

[45] J. Skurczynski. *The Borel Hierarchy is Infinite in the Class of Regular Sets of Trees.* LNCS, Vol. 380, Springer, Berlin. 1989. 416-423.

[46] S.M. Srivastava. *A course on Borel Sets.* Springer. 1998.

[47] L. Staiger. *Hierarchies of Recursive ω-languages.* J. Inf. Process. Cybern. EIK 22 5/6 1986. 219-241.

[48] L. Staiger. *Research in the Theory of ω-languages.* J. Inf. Process. Cybern. EIK 23 8/9 1987. 415-439.

[49] L. Staiger. *Recursive Automata on Infinite Words.* STACS. 1993.

[50] L. Staiger. *ω-languages.* Chapter of the handbook of Formal Languages, Vol 3. Springer. 1997. 201-203.

[51] W. Thomas. *Automata on infinite objects.* Handbook of theoretical computer science, Vol B. 1990.

[52] W. Thomas. H. Lescow. *Logical Specifications of Infinite Computation.* 1994.

[53] W. Thomas. *Languages Automata and Logic .* Handbook of Formal Languages, Vol 3, Springer. 1997. 389-449.

[54] B. A. Trakhtenbrot, Y. M. Barzdin. *Finite Automata.* North-Holland, Amsterdam. 1973.

[55] W. W. Wadge. *Degrees of complexity of subsets of the Baire space.* Notice A.M.S. 1972.

[56] W. W. Wadge. *PH. D. Thesis.* (Handwritten notes). 1976.

[57] W. W. Wadge. *Thesis.* Berkeley. 1984.

[58] K. Wagner. *On ω -regular Sets.* Information and Control 43. 1979. 123-177.